

LIBRO DEL MAESTRO

Matemáticas rápidas y divertidas con ayuda de los mayas

Emma Lam y Elena de Oteyza

EDITORIAL TERRACOTA ET

LIBRO DEL MAESTRO

Matemáticas rápidas y divertidas
con ayuda de los mayas

EDITORIAL TERRACOTA

Edición: Pilar Tapia
Diagramación: Mayra Alvarado
Ilustraciones: Luis Ortega, Mauricio Gómez,
Aldo Meza

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de son propiedad de los titulares del copyright. Queda prohibida su reproducción por cualquier método sin autorización previa y por escrito del editor.

© 2012 Emma Lam y Elena de Oteyza
DR © 2012 Editorial Terracota

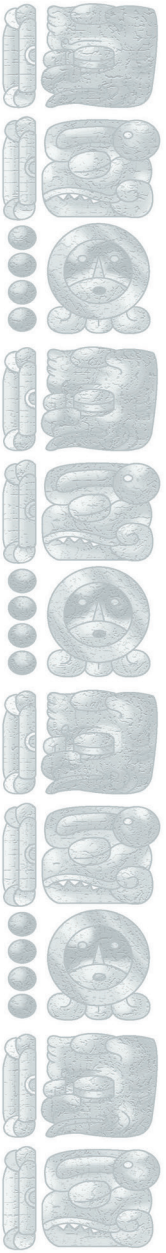
EDITORIAL TERRACOTA

Editorial Terracota, SA de CV
Cerrada de Félix Cuevas 14
Colonia Tlacoquemécatl del Valle
03200 México, D.F.
Tel. +52 (55) 5335 0090

info@editorialterracota.com.mx
www.editorialterracota.com.mx

Impreso en México / Printed in Mexico

Contenido



8 Suma

18 Resta

33 Multiplicación

47 División

68 División con residuo

81 Raíz cuadrada



Suma

Para efectuar las operaciones y simplificar los resultados, usamos las siguientes:

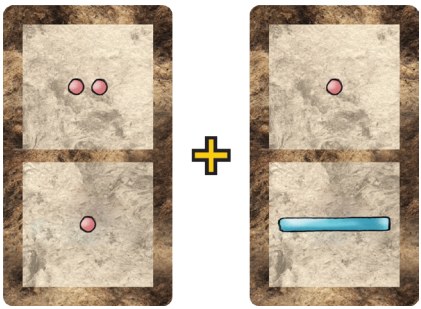
Reglas:

1. 2 rayas en un nivel equivalen a 1 punto en el nivel inmediato superior.
2. 5 puntos en un nivel equivalen a 1 raya en el mismo nivel.

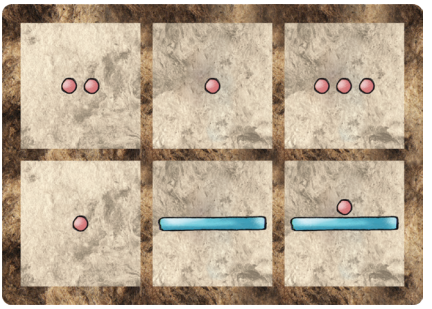
Suma

La suma se efectúa de abajo hacia arriba. Una vez realizada la suma, para escribir correctamente el resultado seguiremos las reglas anteriores.

1. Efectúa la suma



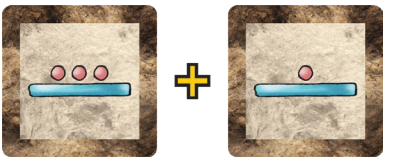
Se suma por niveles. Copiamos en la tercera columna lo que hay en cada sumando.



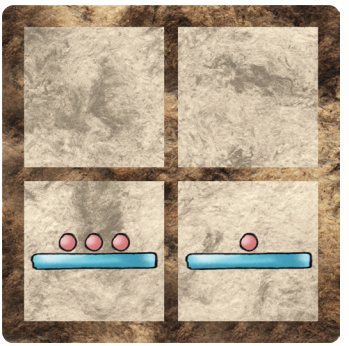
Observamos que el número que obtuvimos como resultado, se puede leer.

Es decir, 21+15=36.

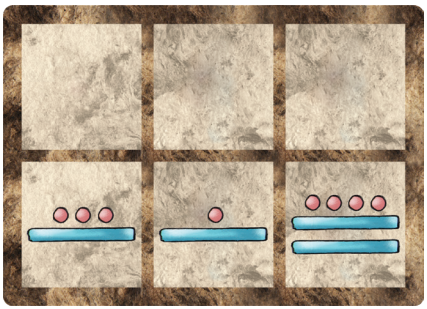
2. Efectúa la suma



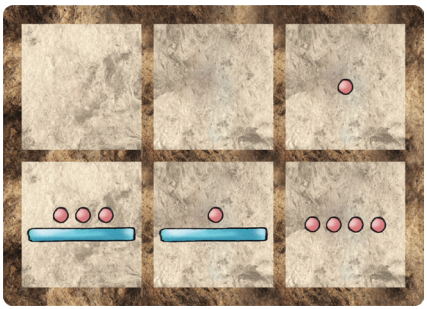
Colocamos los números en el tablero de la siguiente manera:



Copiamos en la casilla de la derecha lo que hay en ambas casillas

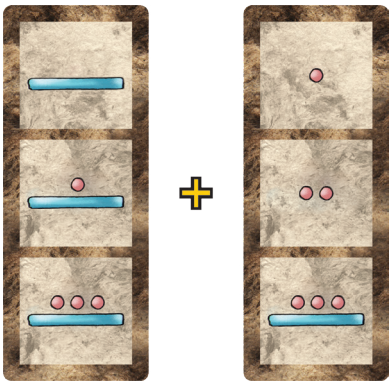


Usando la regla 1, quitamos las 2 rayas del primer nivel y ponemos un punto en el nivel superior.

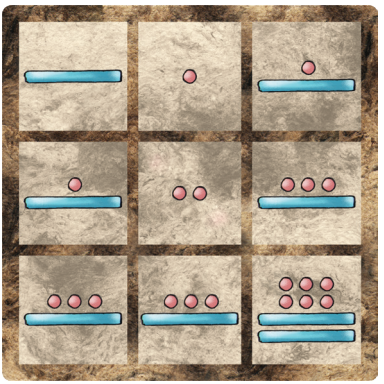


Es decir, 8+6=14.

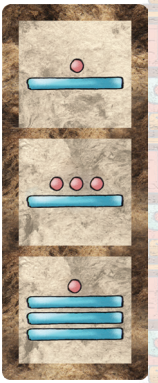
3. Efectúa la suma



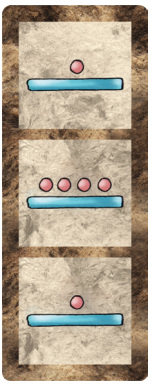
Sumamos por niveles, copiando en la casilla de la derecha lo que encontramos en los sumandos.



Observamos que el número obtenido no se puede leer. Entonces usamos la regla 2, es decir, sustituimos cada 5 puntos por 1 raya.

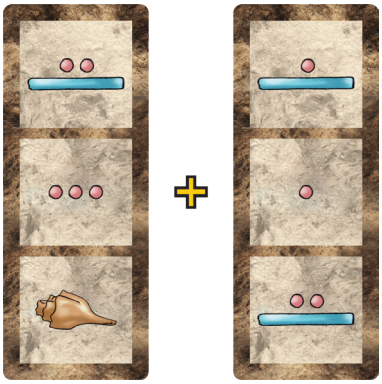


Ahora usamos la regla 1, es decir, quitamos 2 rayas en un nivel y ponemos 1 punto en el nivel inmediato superior.

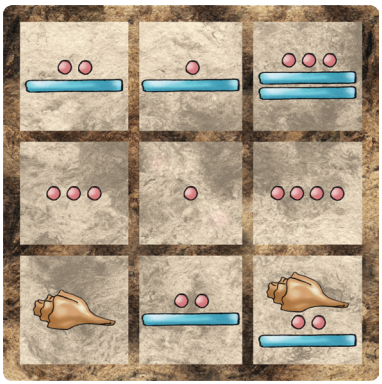


Es decir, 568+128=696.

4. Efectúa la suma

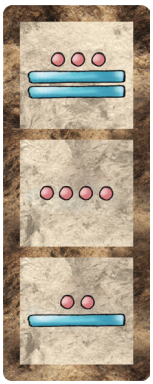


Copiamos lo que hay en cada nivel.



Observamos que el número no se puede leer.

Cuando sumamos, si aparece un  junto con puntos, rayas o puntos y rayas, quitamos el  y dejamos el resto.

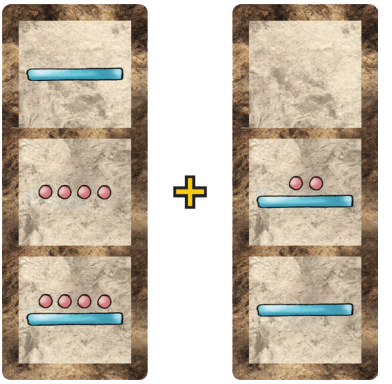


Usando la regla 1, quitamos 2 rayas en un nivel y ponemos un punto en el nivel superior. Observa que debemos agregar un nivel.

Es decir, 730+617=1347.

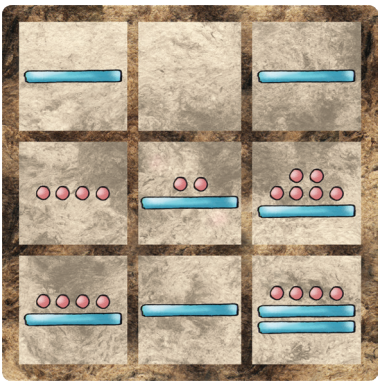


5. Efectúa la suma



Observa que puesto que uno de los números tiene tres cifras y el otro dos, los alineamos de manera que las cifras de las unidades coincidan.

Realizamos la suma:

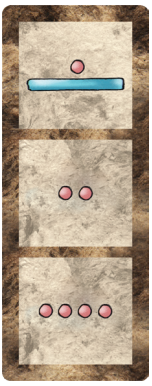




Observamos que el número no se puede leer. Entonces usamos la regla 2, es decir, sustituimos cada 5 puntos por 1 raya.

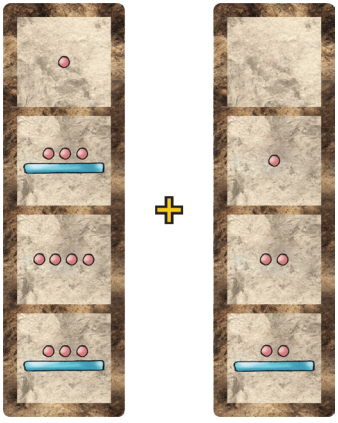
Ahora, usando la regla 1, quitamos 2 rayas en un nivel y ponemos un punto en el nivel superior. Observa que hay dos rayas en el primer nivel y dos en el segundo, por lo que el procedimiento se realiza dos veces.

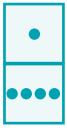
Es decir, 549+75=624.



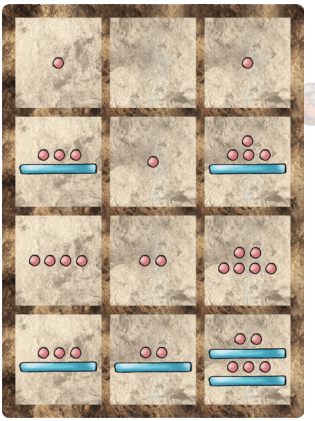
6. En 1848, en Gibraltar fue encontrado el cráneo de una mujer que vivió setenta mil años antes de nuestra era. 127 años después se encontró otro cráneo que data del año 1,500,000 antes de nuestra era y que es tres veces más antiguo que la civilización china. ¿En qué año se encontró el segundo cráneo?

Para resolver el problema debemos sumar:

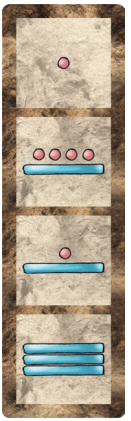




Realizamos la suma



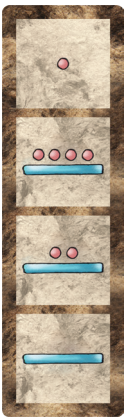
El número obtenido no se puede leer, entonces hacemos los cambios necesarios. Primero sustituimos los puntos por rayas:



y después cuando haya 2 rayas en un nivel, las quitamos y ponemos un punto en el nivel superior.



El segundo cráneo se encontró en el año

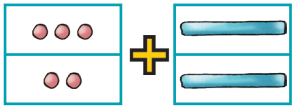


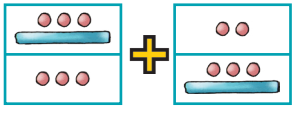
Ejercicios

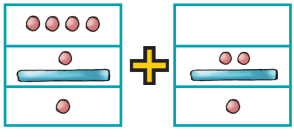
Efectúa las siguientes sumas:

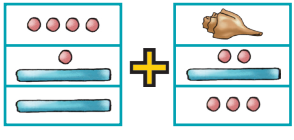
1. 

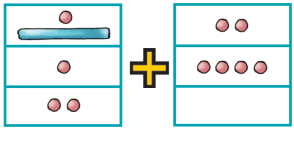
2. 

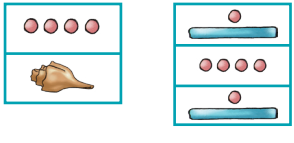
3. 

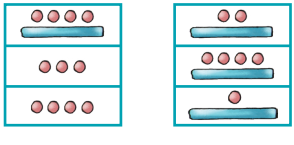
4. 

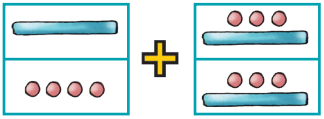
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

Escribe los números en maya y efectúa las siguientes sumas:

11. 5+4
12. 18+73
13. 109+235
14. 918+47
15. 1002+705
16. 4621+6087

Resuelve los siguientes problemas.

17. Yuri Gagarin, astronauta ruso, fue el primer hombre en viajar al espacio en 1961. Veintitrés años más tarde el astronauta Leonid Kizim, también de la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas, se convirtió en el primer hombre en ser padre mientras se encontraba en el espacio, ¿en qué año nació su hijo?
18. El total de medallas que había recibido Estados Unidos de América desde el inicio de los juegos olímpicos en 1896 hasta 1988 era de 746 de oro, 560 de plata y 475 de bronce. Encuentra el total de medallas que había recibido Estados Unidos hasta entonces.
19. La longitud del río Bravo es de aproximadamente 3030 kilómetros. La longitud del Tigris es de 2740 kilómetros. La longitud de estos dos es 900 kilómetros menor que la longitud del río Nilo, el más largo del mundo. Encuentra la longitud aproximada del río Nilo.
20. Benito Juárez nació en 1806. Asumió la presidencia de México en 1858. Tenía 53 años cuando promulgó las Leyes de Reforma. ¿En qué año las promulgó?

Resta

Recordemos las reglas para efectuar operaciones.

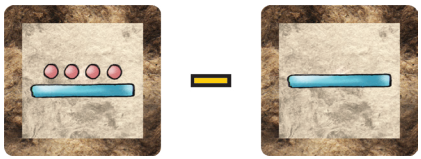
Reglas:

1. 2 rayas en un nivel equivalen a 1 punto en el nivel inmediato superior.
2. 5 puntos en un nivel equivalen a 1 raya en el mismo nivel.
3. 1 punto en un nivel equivale a 2 rayas en el nivel inmediato inferior.
4. 1 raya en un nivel equivale a 5 puntos en ese nivel.

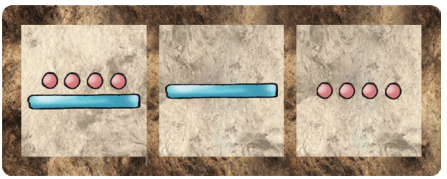
Resta

La resta se efectúa de abajo hacia arriba.

1. Efectúa la resta

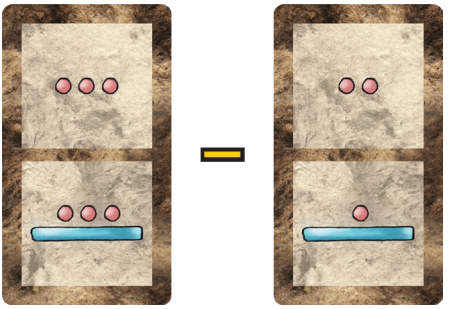


Escribimos como resultado lo que queda al eliminar del primero la raya del segundo. Es decir "raya mata raya".

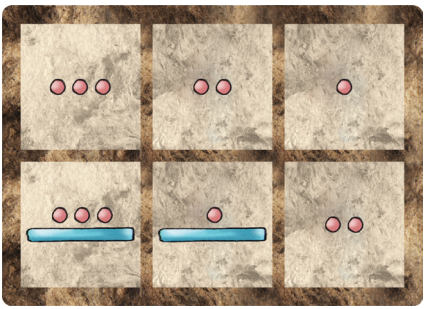


Es decir, 9-5=4.

2. Efectúa la resta

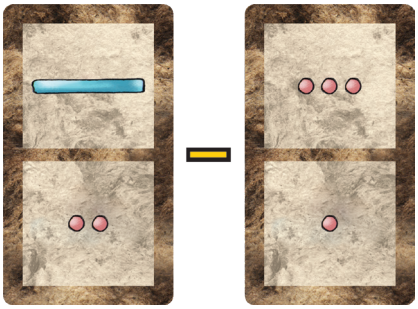


Se resta por niveles. En el nivel de las unidades escribimos como resultado lo que queda al eliminar de la primera casilla lo que hay en la segunda, "raya mata raya" y "punto mata punto". Repetimos el procedimiento en el nivel de las decenas

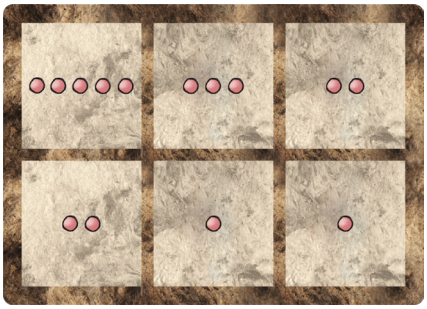


Es decir, 38-26=12.

3. Efectúa la resta



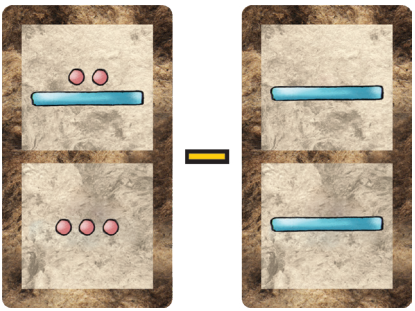
Observamos que en el nivel de las decenas no podemos realizar la resta; entonces, usando la regla 4 descomponemos la raya en cinco puntos y ahora procedemos como en los ejemplos anteriores.



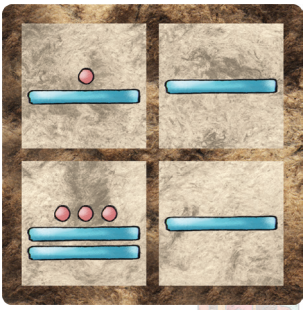
Es decir, 52-31=21.

Cuando restamos, todos los cambios los hacemos en el minuendo, el sustraendo no debe tocarse.

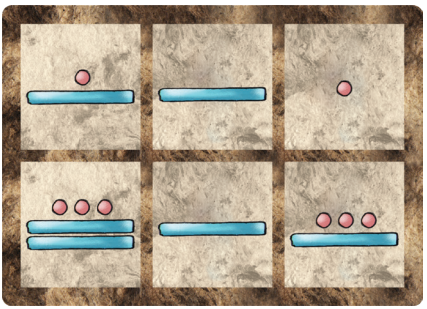
4. Efectúa la resta



En el primer nivel no podemos efectuar la resta. En el minuendo quitamos un punto del segundo nivel y colocamos 2 rayas en el primero usando la regla 3, es decir:

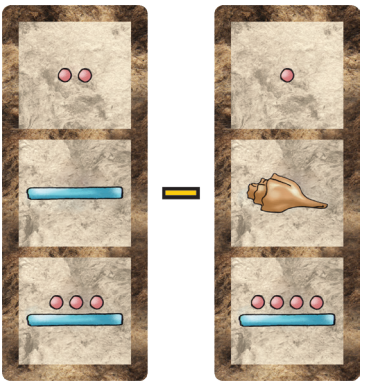


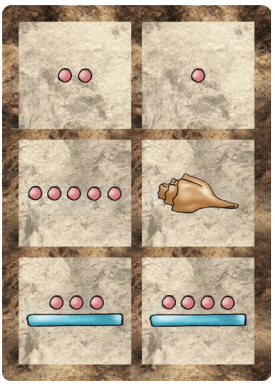
y ahora ya podemos restar



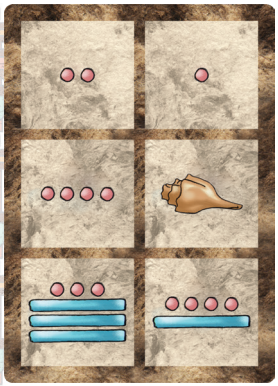
Es decir, 73-55=18.

5. Efectúa la resta



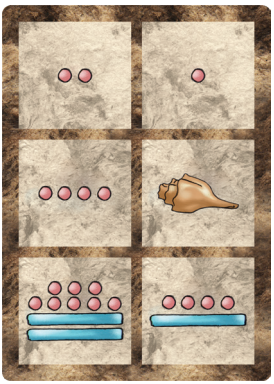


Como en el primer nivel no se puede hacer la resta, reemplazamos en el minuendo la raya del segundo nivel por cinco puntos.

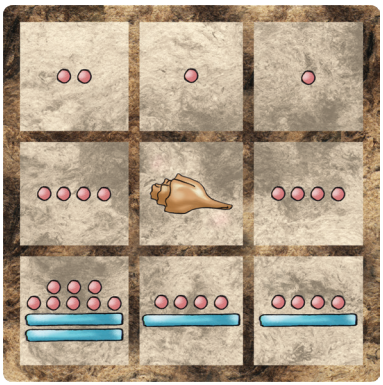


Del minuendo, quitamos un punto del segundo nivel y ponemos dos rayas en el primero.

Sustituimos una raya del primer nivel por cinco puntos.

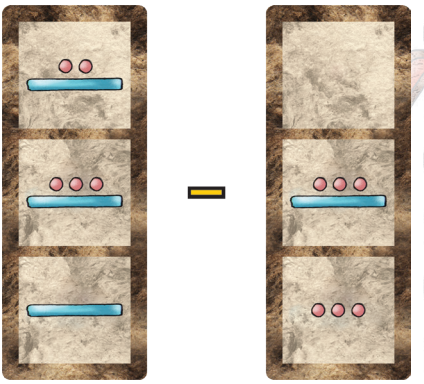


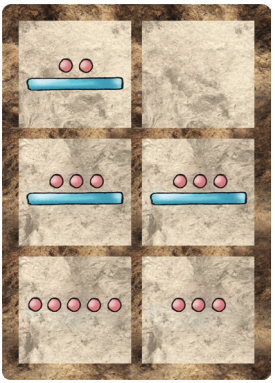
Observamos que en cada nivel ya se puede hacer la resta. Nota que en el segundo nivel del sustraendo aparece un  esto significa no quitar nada al minuendo en ese nivel. Hacemos la resta.



Es decir, 258-109=149.

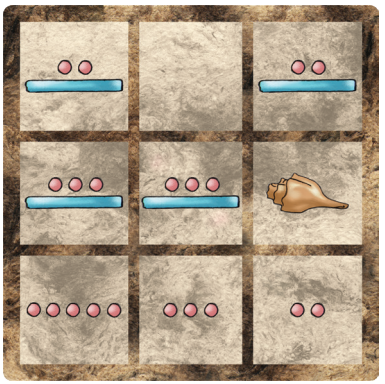
6. Efectúa la resta





En el minuendo sustituimos la raya del primer nivel por cinco puntos.

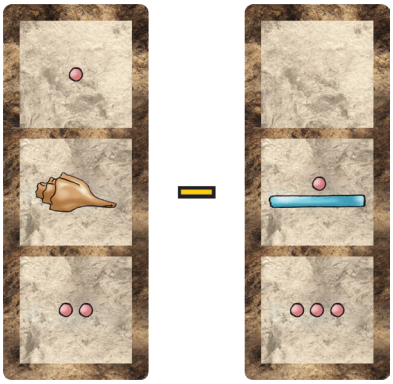
Efectuamos la resta



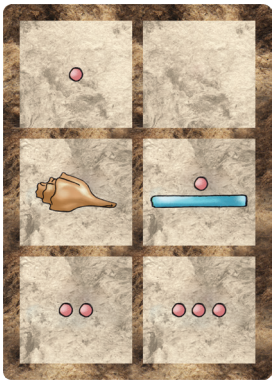
Observamos que la casilla del segundo nivel queda vacía, por lo que debemos poner un caracol para no perder la posición de las decenas.

Es decir, 785-83=702.

7. Efectúa la resta

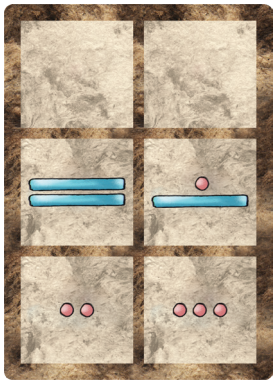


Colocamos los números en el tablero

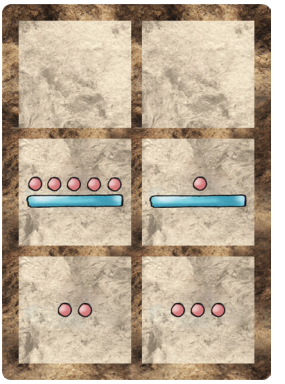


Observamos que no podemos realizar la resta en el primer nivel ni en el segundo. Entonces quitamos el punto del tercer nivel del minuendo y ponemos dos rayas en el segundo.

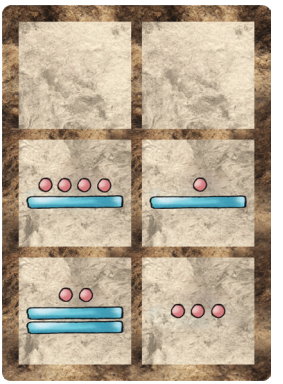
Con lo anterior, el nivel tres del minuendo queda vacío, podemos poner un caracol o no, ya que eso no afecta el número obtenido.



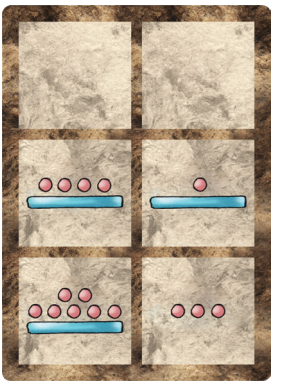
Una de las rayas del segundo nivel la reemplazamos por cinco puntos.



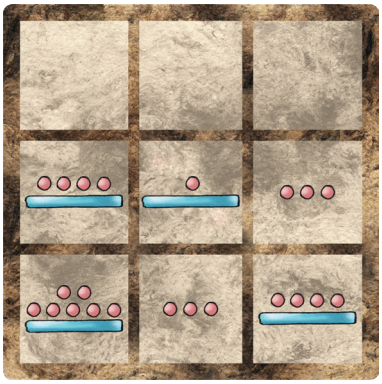
Quitamos un punto del segundo nivel y ponemos dos rayas en el primero.



Cambiamos una de las rayas del primer nivel por cinco puntos

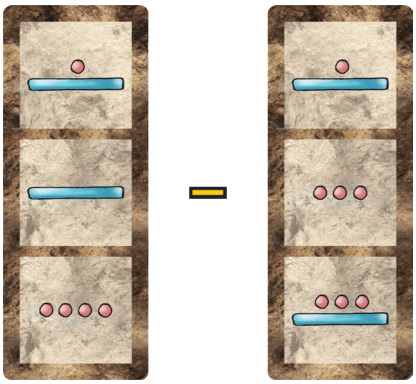


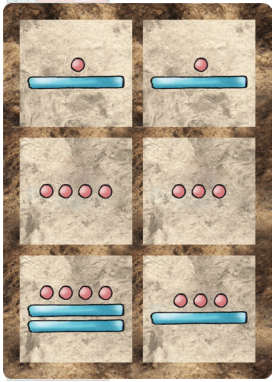
y realizamos la resta:



Es decir, 102-63=39.

8. Efectúa la resta





Para efectuar la operación en el primer nivel debemos sustituir en el minuendo la raya del segundo nivel por cinco puntos, uno de los cuales quitaremos y pondremos dos rayas en el primer nivel.

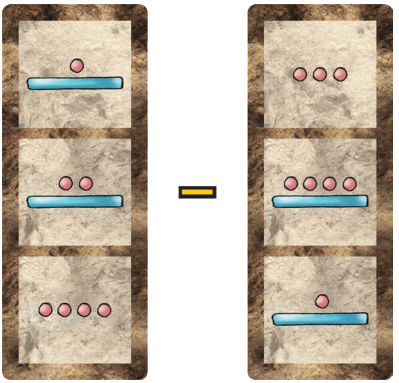
Ahora efectuamos la resta



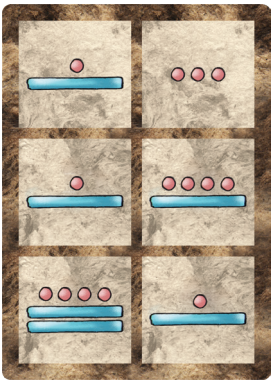
Observamos que el caracol del nivel 3 puede omitirse ya que el número se lee igual con o sin él.

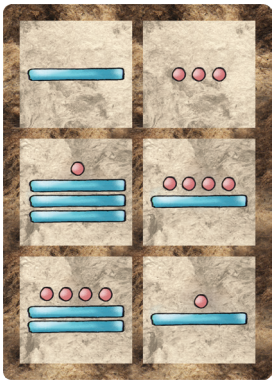
Es decir, 654-638=16.

9. Efectúa la resta



En el primer nivel no podemos efectuar la resta, entonces es necesario quitar en el minuendo un punto del segundo nivel y colocar dos rayas en el primero, usando la regla 3.



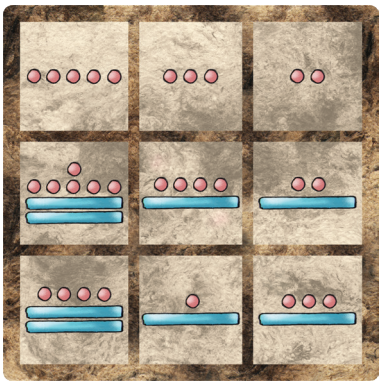


En el segundo nivel no podemos efectuar la resta, entonces es necesario quitar un punto del tercer nivel, colocando dos rayas en el segundo.

y ahora debemos cambiar una raya del nivel dos y la del nivel tres por cinco puntos, usando la regla 4.



Finalmente realizamos la resta:



Es decir, 674-396=278.

10. En 1608 se fabricó en Holanda el primer telescópio comercial. 150 años después el cometa Halley es visto desde la tierra; su reaparición la había predicho Halley 53 años antes. ¿En qué año hizo Halley la predicción y en qué año reapareció el cometa?

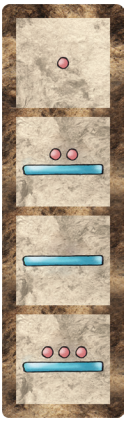


El cometa Halley reapareció en el año

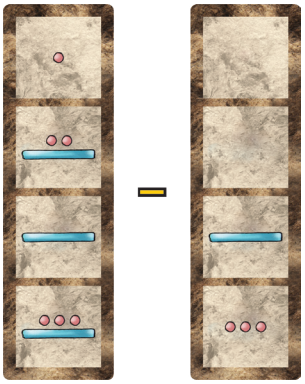


Realizamos la suma

Escribimos el resultado como



La predicción de Halley fue en



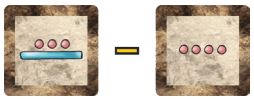
Realizamos la resta

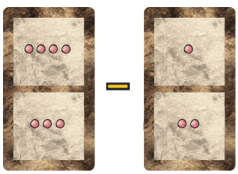


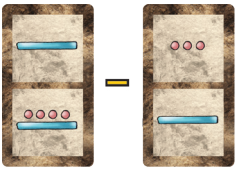
El cometa reapareció en 1758. Halley hizo la predicción en 1705.

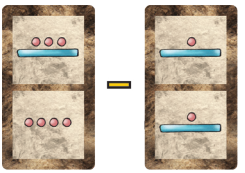
Ejercicios

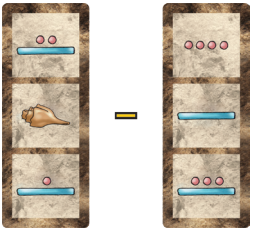
Efectúa las siguientes restas:

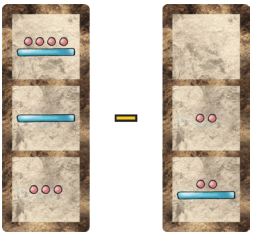
1. 

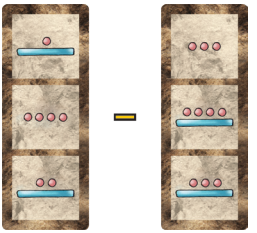
2. 

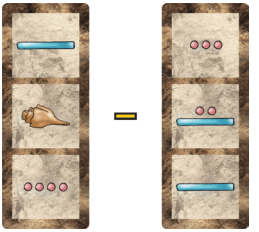
3. 

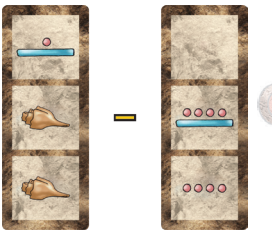
4. 

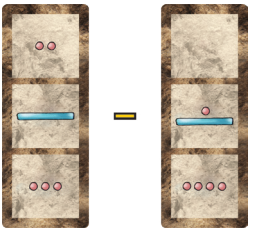
5. 

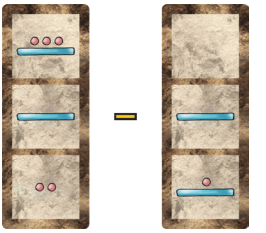
6. 

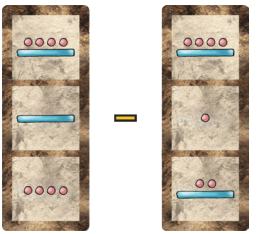
7. 

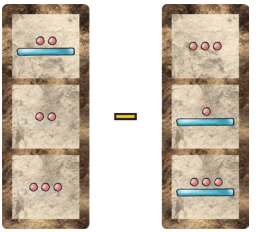
8. 

9. 

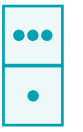
10. 

11. 

12. 

13. 





Escribe los números en maya y efectúa las siguientes restas:

14. 7-4.
15. 16-11.
16. 38-19.
17. 254-125.
18. 706-87.
19. 3582-208.
20. 2416-1547.

Resuelve los siguientes problemas.

21. El océano Pacífico tiene una profundidad media de 3940 metros. La fosa más profunda encontrada hasta ahora tiene una profundidad aproximada de 11033 metros. ¿Cúal es la diferencia entre la profundidad de la fosa y la profundidad media?
22. La estreptomicina, primer antibiótico eficaz en el tratamiento de la tuberculosis, fue usado por vez primera en 1943. Veintidós años antes, fue utilizada por primera vez la insulina en el tratamiento de la diabetes. ¿En qué año se usó por vez primera la insulina?
23. La Sierra Madre Occidental mide 1450 kilómetros de largo, la Sierra Madre Oriental 1530 km y la Sierra Madre del Sur 965. El doble de la suma de las tres longitudes supera en 690 kilómetros a la cordillera de los Andes. Encuentra la longitud de dicha cordillera.
24. Un 6 de agosto sucedieron los siguientes acontecimientos: En 1945 estalla la bomba atómica en Hiroshima, 19 años antes se exhibe la primera película sonora y 45 años antes de esto último nace Alexander Fleming, el descubridor de la penicilina. ¿En qué año nació Fleming y cuándo se exhibió la primera película sonora?

Multiplicación

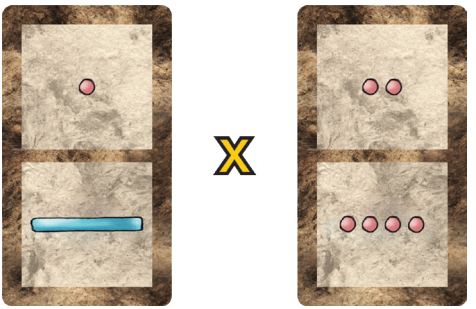
Recordemos las reglas para efectuar operaciones.

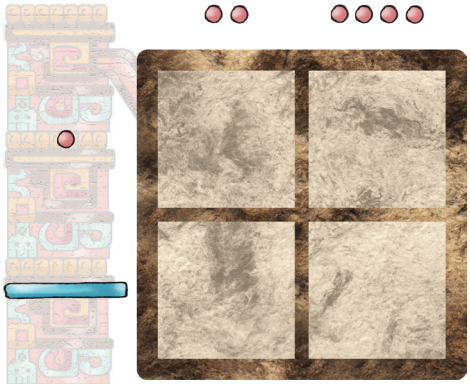
Reglas:

1. 2 rayas en un nivel equivalen a 1 punto en el nivel inmediato superior.
2. 5 puntos en un nivel equivalen a 1 raya en el mismo nivel.
3. 1 punto en un nivel equivale a 2 rayas en el nivel inmediato inferior.
4. 1 raya en un nivel equivale a 5 puntos en ese nivel.

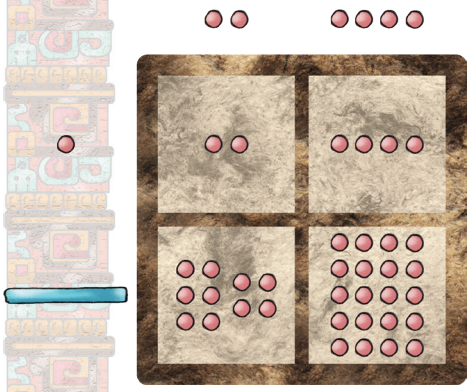
Multiplicación

1. Efectúa la multiplicación



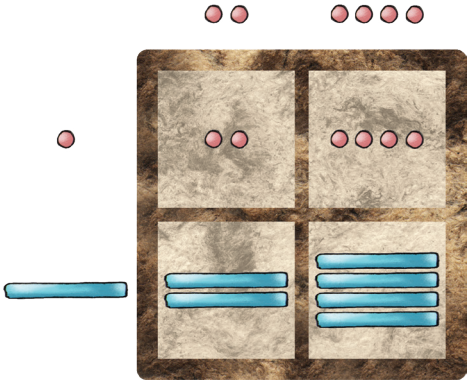


Colocamos los números fuera del tablero de la siguiente manera:

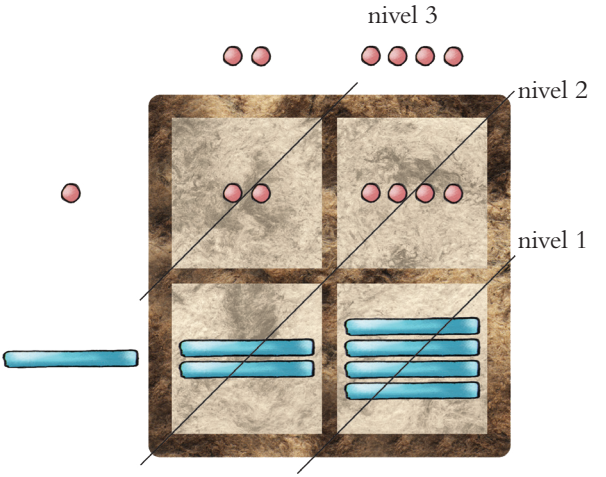


En cada casilla repetimos el símbolo que aparece en la parte superior de esa columna, tantas veces como indica el símbolo de la parte izquierda en ese renglón:

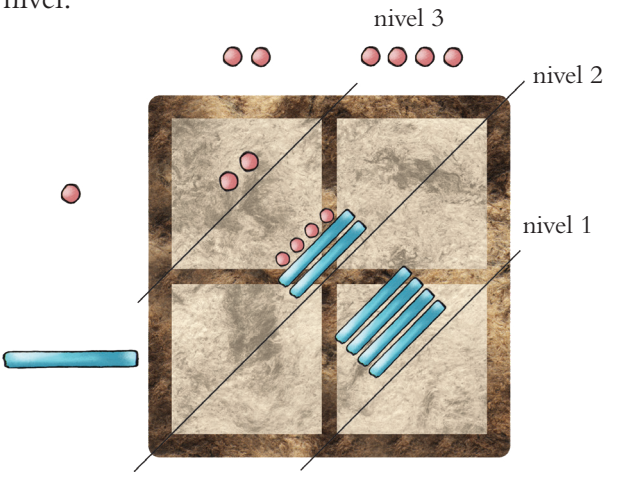
Cambiamos, en las casillas en las que sea posible, una raya por cada cinco puntos.



Ahora estableceremos los niveles de la siguiente manera:

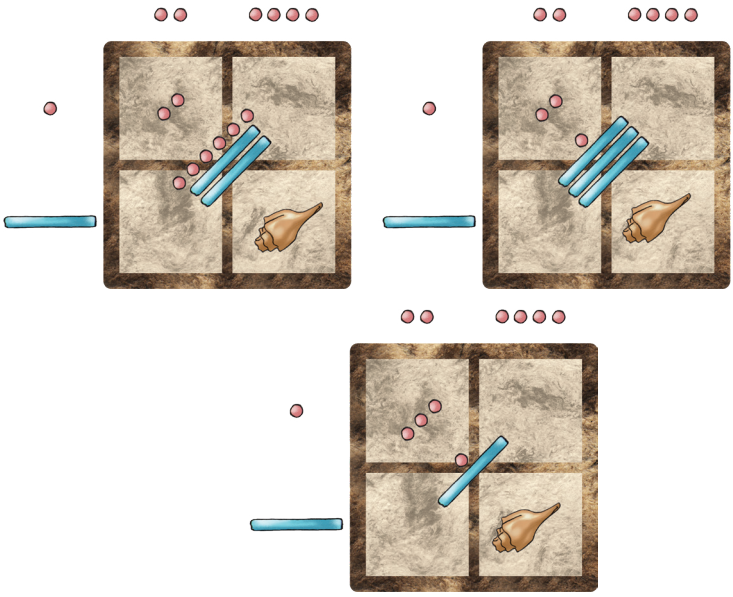


Unimos lo que encontramos en el tablero en cada nivel.



Usamos las reglas 1 y 2 tantas veces como haga falta, es decir, dos rayas en un nivel corresponden a un punto en el nivel superior y cinco puntos equivalen a una raya. Mostramos los cambios en la secuencia siguiente. Observa que en el primer nivel al pasar las 4 rayas como 2 puntos al nivel siguiente, la

casilla queda vacía, debemos poner un caracol para no perder la posición de las unidades.



es decir, $15 \times 24 = 360$.

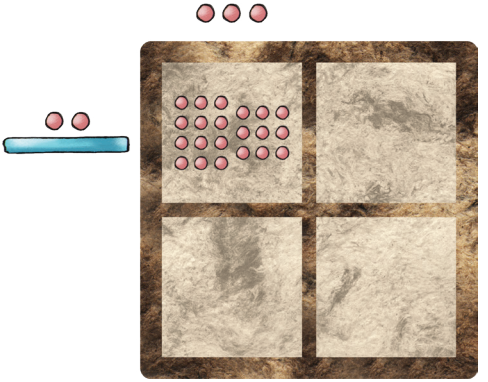
2. Efectúa la multiplicación



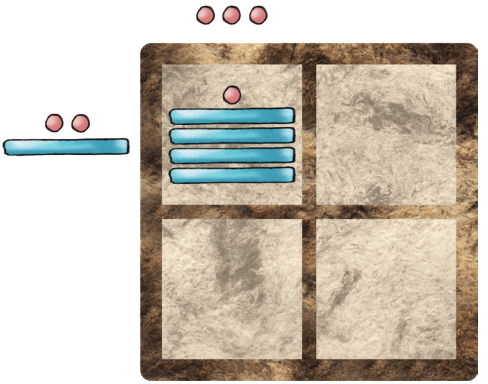


Colocamos, fuera del tablero, el primer número de manera usual y el segundo de manera horizontal. Cabe mencionar que los números se pueden colocar en cualquier orden.

En cada casilla repetimos el símbolo que aparece en la parte superior de esa columna, tantas veces como indica el símbolo de la parte izquierda en ese renglón:

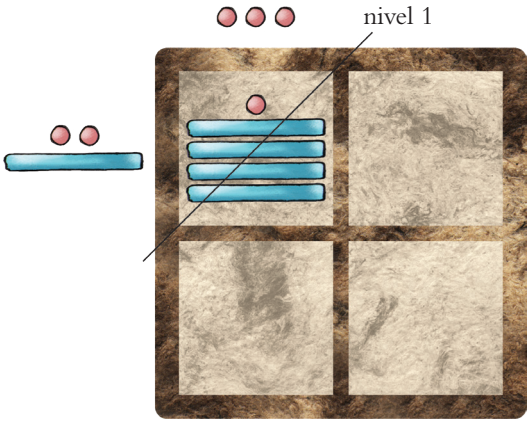


Cambiamos una raya por cada cinco puntos

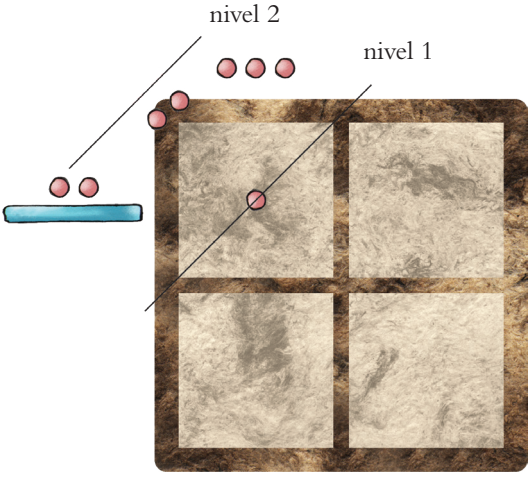


Puesto que no importa el orden en el que se colocan los factores, da lo mismo colocar siete veces tres puntos, que fue lo que hicimos anteriormente, que tres veces siete; la ventaja de hacerlo de la última forma es que haríamos menos cambios. Ilustraremos

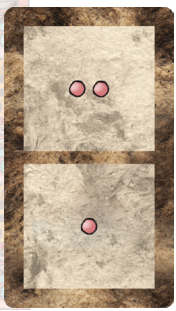
lo anterior en los ejemplos siguientes. Ahora estableceremos los niveles de la siguiente manera:



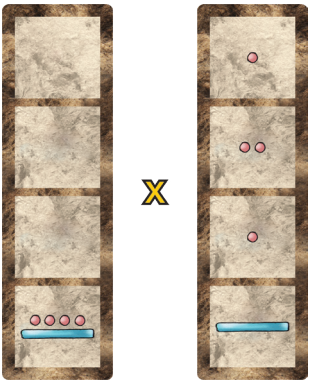
Ahora usamos la regla 1, cada dos rayas en un nivel pasan como un punto al nivel superior. Observamos que debemos aumentar un nivel.



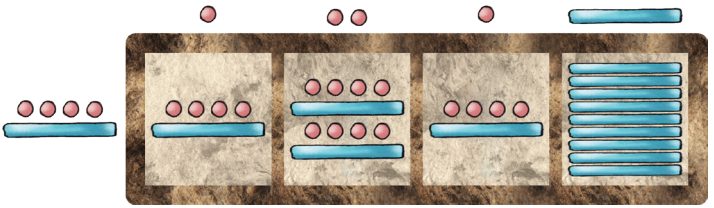
El número obtenido es el resultado del producto. Es decir, $7 \times 3 = 21$.



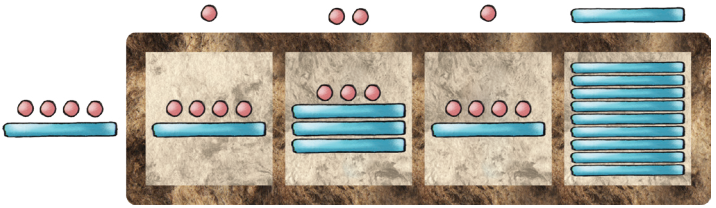
3. Efectúa la multiplicación



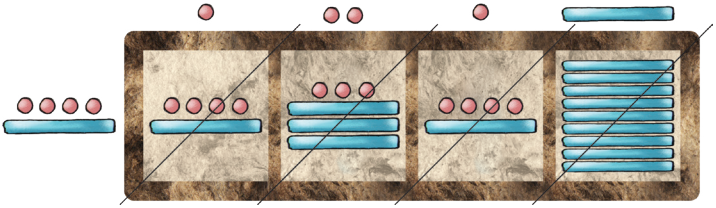
Colocamos los números de la manera usual y llenamos las casillas de la manera que resulte conveniente. Por ejemplo, en la primera casilla, colocamos una vez nueve en lugar de nueve veces un punto, y así sucesivamente. Observamos que en la última casilla es más cómodo poner nueve veces cinco que cinco veces nueve:



En la segunda casilla cambiamos cinco puntos por una raya.



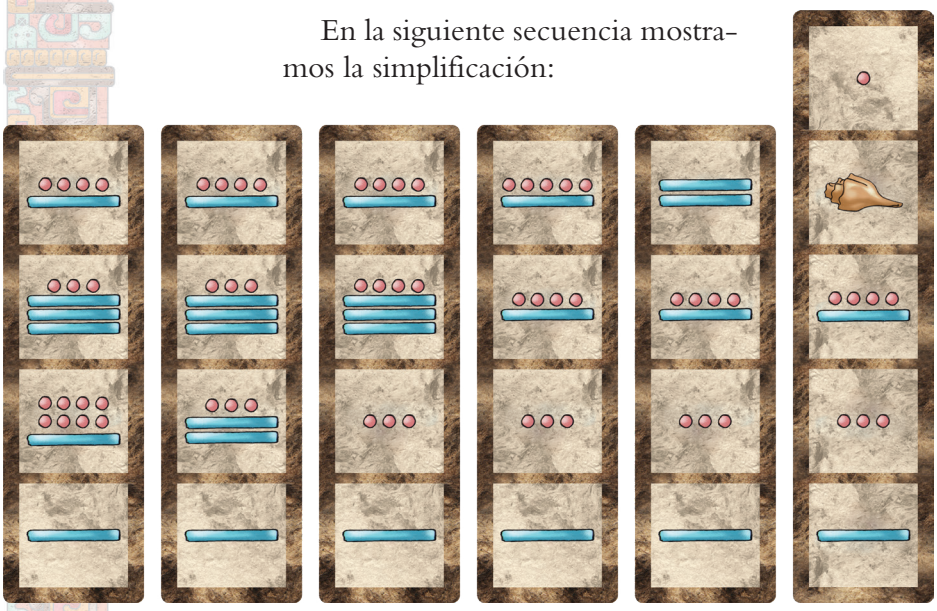
Marcamos los niveles.



Escribimos el resultado verticalmente:

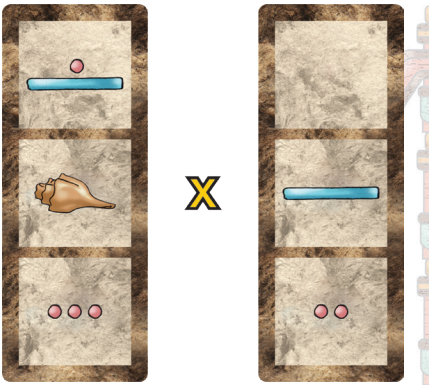


En la siguiente secuencia mostramos la simplificación:

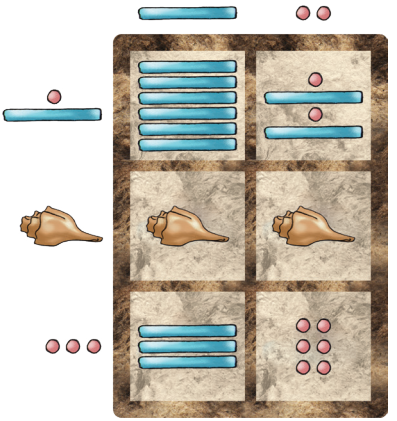


es decir, $9 \times 1215 = 10\,935$.

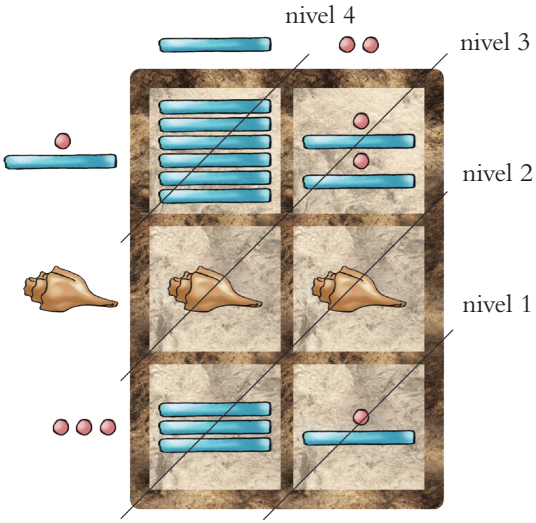
4. Efectúa la multiplicación



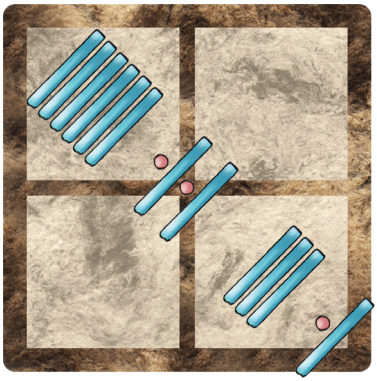
Colocamos los números fuera del tablero, el primero en forma vertical, el segundo de manera horizontal y repetimos, como en el ejemplo anterior, el símbolo de la parte superior de la columna tantas veces como indica el símbolo de la parte izquierda del renglón o bien, el símbolo de la parte izquierda del renglón tantas veces como indica el símbolo de la parte superior de la columna. Utilizamos el símbolo  para indicar que en ese nivel no hay puntos ni rayas, de modo que observamos lo que hay arriba de la columna y como en ese caso debemos repetir ninguna vez el símbolo indicado, escribimos  en la casilla correspondiente.



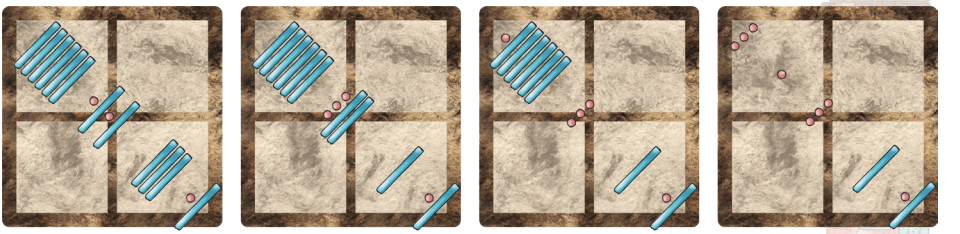
Cambiamos, donde sea posible, cinco puntos por una raya y establecemos los niveles.



Unimos en la diagonal lo que encontramos en cada nivel. Si aparece  junto con puntos, rayas o puntos y rayas, quitamos el  y dejamos el resto:



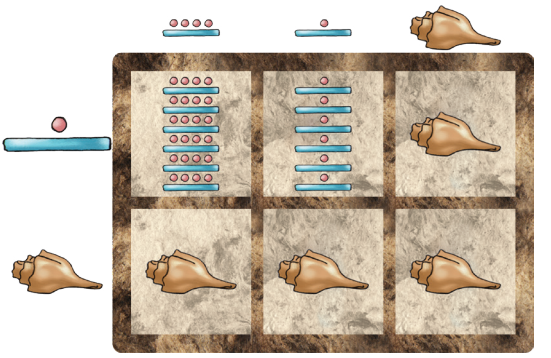
Por último, usamos las reglas 1 y 2 para simplificar el número:



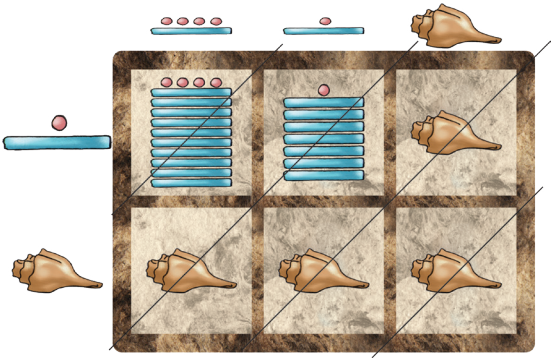
es decir, $603 \times 52 = 31\,356$.

5. El dragón australiano, *Austhophlebia costalis*, puede volar 960 metros en un minuto. ¿Cuál es la distancia que podría recorrer en una hora?

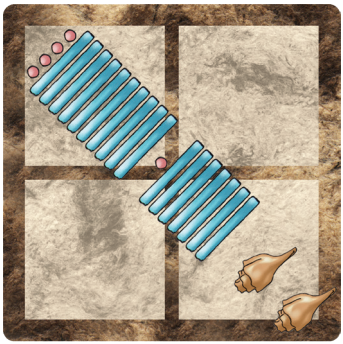
Como una hora tiene 60 minutos entonces debemos multiplicar 960 por 60



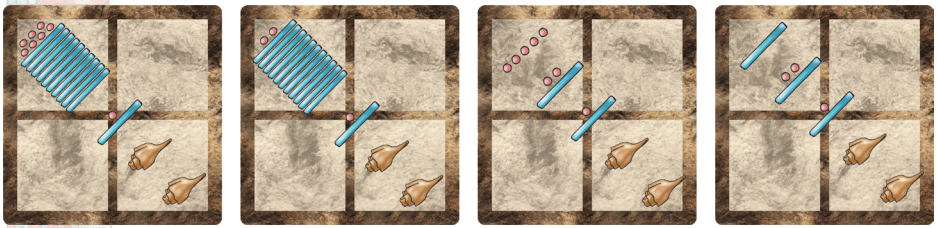
En las casillas en las que es posible, ponemos una raya por cada cinco puntos y establecemos los niveles.



Unimos lo que está en la diagonal:



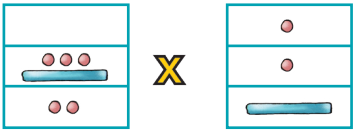
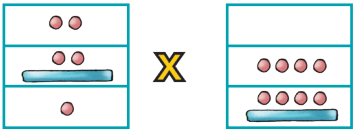
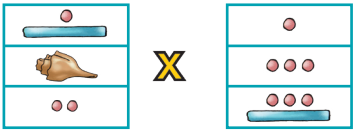
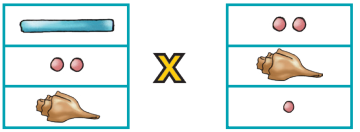
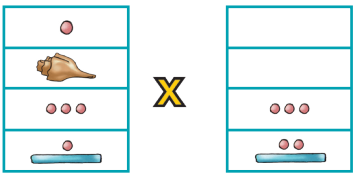
y simplificamos:



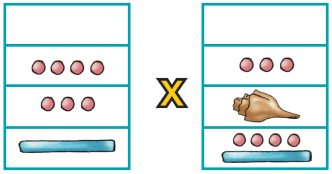
El dragón australiano puede recorrer 57600 metros en una hora.

Ejercicios

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 



10. 

Escribe los números en maya y efectúa las multiplicaciones.

11. 8×6.
12. 5×901.
13. 72×34.
14. 27×27.
15. 169×581.
16. 350×121.
17. 2514×193.

Resuelve los siguientes problemas.

18. Los primeros juegos olímpicos de invierno se realizaron en 1924 en Chamonix, Francia, mientras que la edición número XV de los mismos se llevó a cabo en Calgary, Canadá. ¿En qué año se realizó en Calgary? (Recuerda que los juegos olímpicos de invierno se realizan cada cuatro años).
19. El periodo de gestación de una ardilla puede durar hasta 40 días, mientras que el de un panda himalayo puede durar entre tres y cuatro veces más. ¿Cuánto puede durar el periodo de gestación de un panda himalayo?
20. Un león marino de California puede alcanzar una velocidad de 40 kilómetros por hora. El halcón peregrino, considerado el animal más veloz, puede recorrer nueve veces más que el león marino en el mismo tiempo. ¿Qué velocidad puede alcanzar el halcón?

División

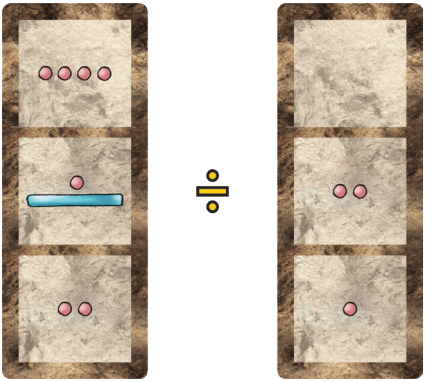
Para efectuar las operaciones y simplificar los resultados, usamos las siguientes:

Reglas:

1. 2 rayas en un nivel equivalen a 1 punto en el nivel inmediato superior.
2. 5 puntos en un nivel equivalen a 1 raya en el mismo nivel.
3. 1 punto en un nivel equivale a 2 rayas en el nivel inmediato inferior.
4. 1 raya en un nivel equivale a 5 puntos en ese nivel.

División

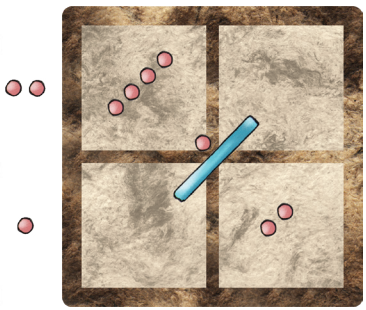
1. Efectúa la división



Estamos buscando un número que al multiplicarlo por  nos dé 

Como el resultado de la multiplicación lo vemos diagonalmente, dentro del tablero, entonces colocamos los números de la siguiente manera:

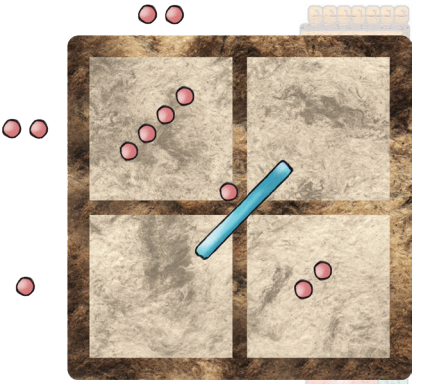
El  lo colocamos fuera del tablero y a la izquierda, y el  dentro del tablero en la diagonal, empezando en la casilla superior izquierda.

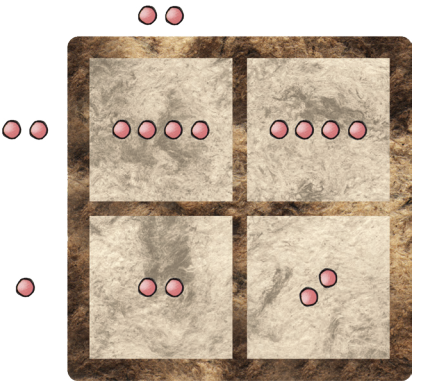


Se coloca siempre la cifra de mayor orden en esa casilla y las demás en el lugar que corresponda recordando la manera en la que se establecen los niveles en la multiplicación.

Debemos colocar arriba y afuera del tablero el símbolo que corresponda, de manera que la figura que coloquemos, tantas veces como indica la figura de la izquierda, sea lo que vemos en la primera casilla de la primera columna. Así, sobre la primera columna debemos colocar dos puntos:

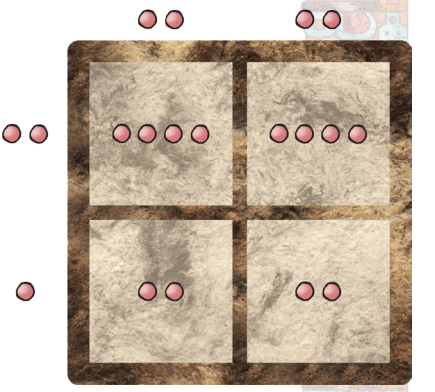
Lo que aparece en el siguiente nivel, puede distribuirse en las dos casillas que lo forman, de manera que, puesto que colocamos dos puntos arriba, en la casilla de abajo corresponden dos puntos.





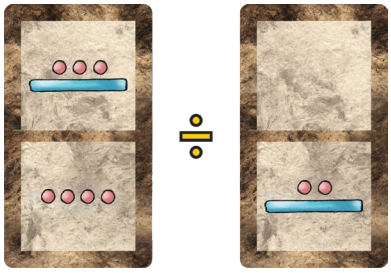
Así, como tenemos un  , cambiamos la raya por cinco puntos, colocamos dos puntos en la segunda casilla de la primera columna y los cuatro sobrantes en la casilla de arriba, sin cambiar de nivel.

Ahora la primera columna está completa. Para la segunda, procedemos de la misma manera: Puesto que a la izquierda hay dos puntos, debemos colocar dos puntos para que al considerarlo dos veces, obtengamos lo que hay en la casilla. Observamos que la operación está completa.



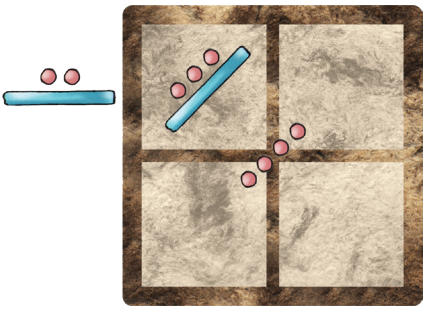
De donde 462÷21=22.

2. Efectúa la división

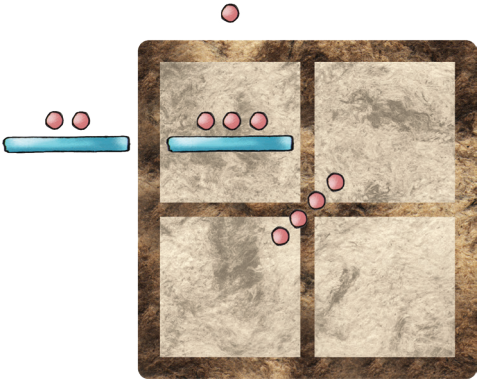


Estamos buscando un número que al multiplicarlo por  nos dé 

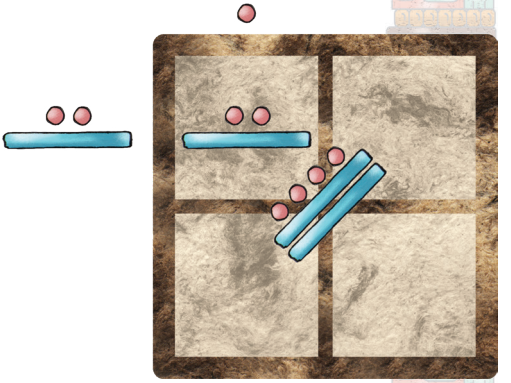
Colocamos el dividendo diagonalmente dentro del tablero y el divisor verticalmente, afuera y a la izquierda.



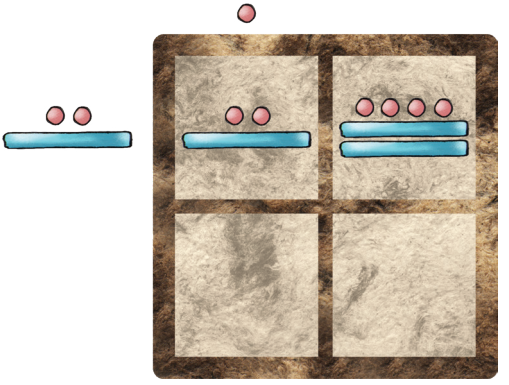
Recuerda que en cada casilla debe verse lo que aparece arriba tantas veces como lo que tenemos a la izquierda. Como en la primera casilla hay tres puntos y una raya, y el número que está afuera del tablero es una raya y dos puntos, entonces arriba de la primera columna debe aparecer un punto.



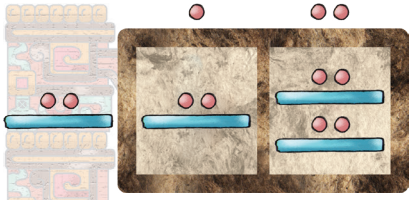
Ahora debemos verificar que la operación esté correcta. Al hacer la operación observamos que nos sobra un punto, lo quitamos y ponemos dos rayas en el nivel inmediato inferior.



Como el divisor solamente tiene unidades, movemos lo que queda en la diagonal a la casilla de arriba a la derecha, que es del mismo nivel:

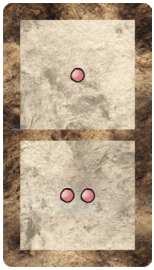


Como en la casilla de arriba a la derecha hay dos rayas y cuatro puntos, formamos dos  entonces arriba de esta casilla debemos colocar dos puntos:



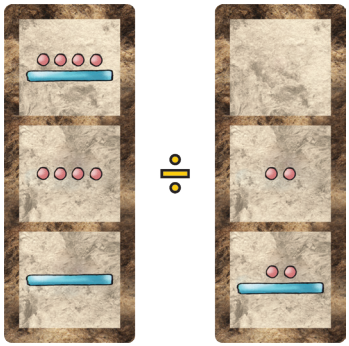
Por lo tanto, el resultado de la división es el número

que aparece fuera del tablero en la parte superior. Es decir,

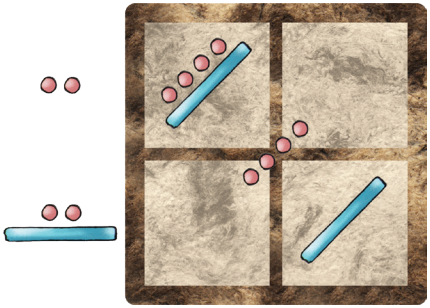


de donde 84÷7=12.

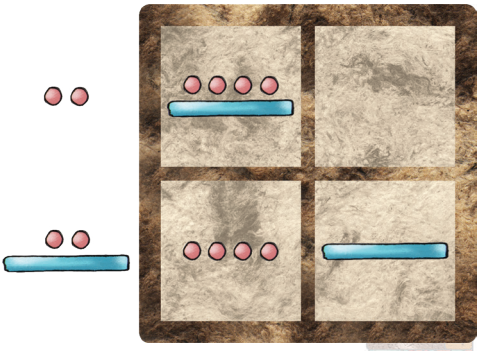
3. Efectúa la división



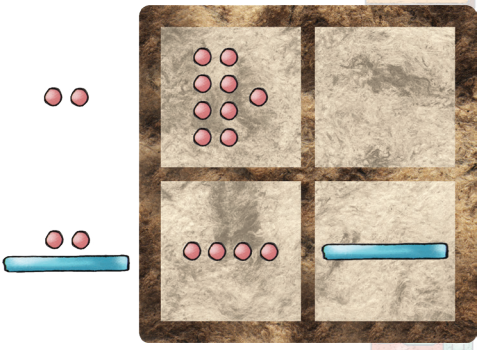
Colocamos los números en el tablero.



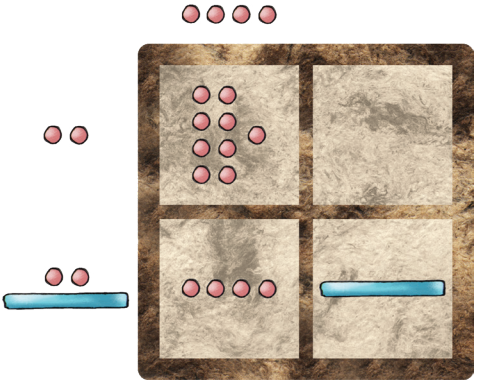
Colocamos las cifras del dividendo de la siguiente manera. (Notamos que las cifras no han cambiado de nivel, debido a que en el dividendo vemos los niveles sobre las diagonales).

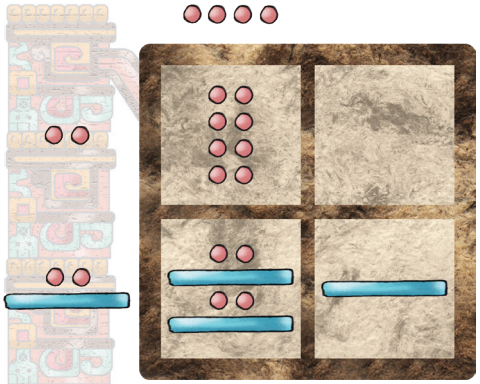


Ahora hacemos la división: Sustituimos la raya del número de la primera casilla por cinco puntos y colocamos lo que hay en la casilla, en parejas.



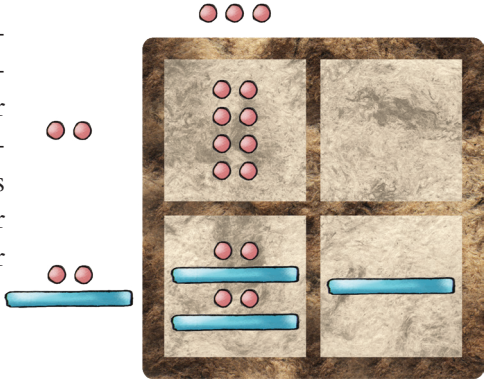
Esto nos indica que cuatro puntos es el símbolo candidato que debemos colocar arriba y ver si funciona.



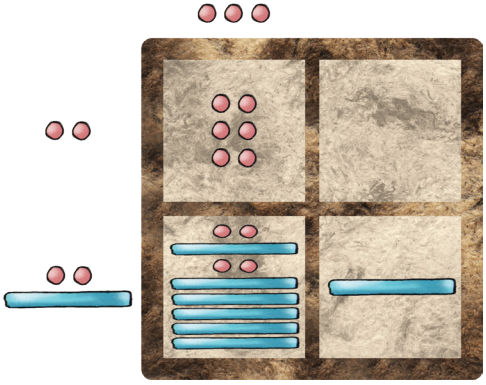


Observamos que en la primera casilla sobra un punto, el cual podemos quitar y poner dos rayas en el nivel inmediato inferior,

pero entonces no es posible completar correctamente la casilla inferior izquierda porque sólo tenemos dos  y nos faltarían otros dos, por ello intentamos colocar arriba sólo tres puntos.

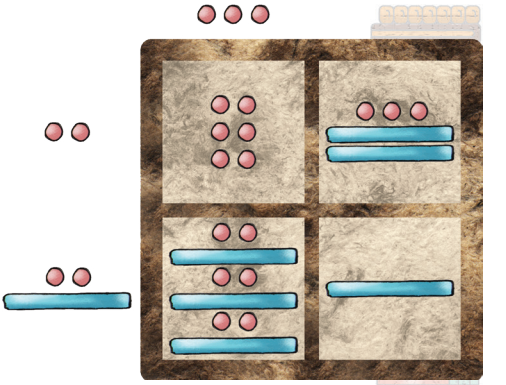


Quitamos los dos puntos restantes en la primera casilla y ponemos cuatro rayas en el nivel de abajo.

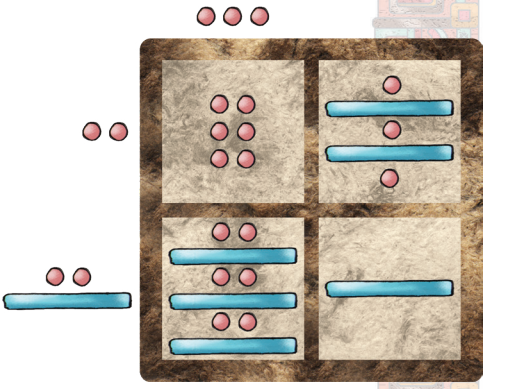




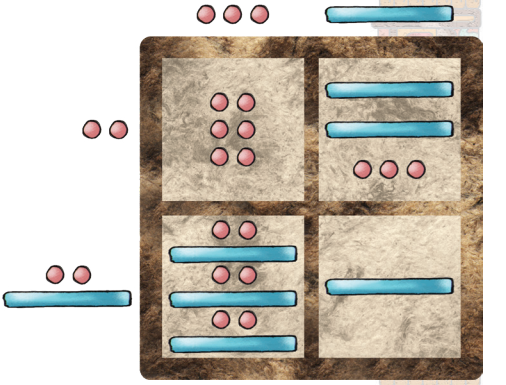
En la casilla inferior izquierda cambiamos una raya por cinco puntos y dejamos tres  en la casilla de abajo a la izquierda y pasamos el resto al mismo nivel pero a la casilla de arriba a la derecha.



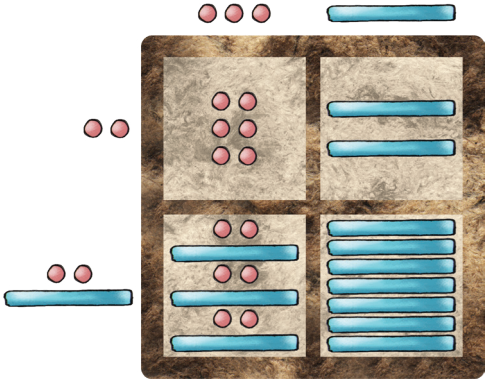
Observamos que la primera columna está completa. Procedemos con la segunda columna: hay dos rayas y tres puntos, podemos formar dos  y sobra un punto.



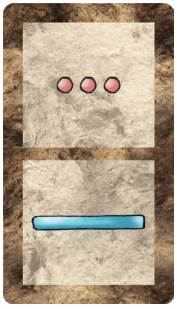
Si colocamos un  arriba a la derecha, sobra un punto, el cual podemos quitar, colocando dos rayas en el nivel de abajo, formando un grupo de tres rayas con la que ya teníamos, pero vemos que es insuficiente para completar la casilla. Intentemos con una raya, entonces colocamos en la casilla de arriba a la derecha dos veces una raya.



y pasamos los tres puntos que sobran al nivel de abajo como seis rayas.

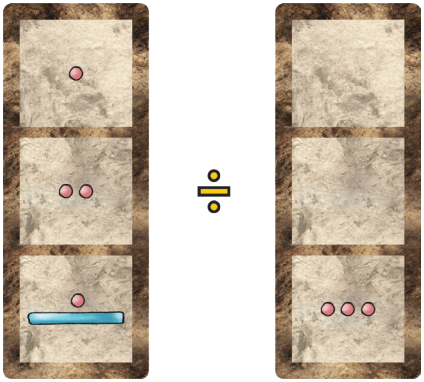


Observamos que en la casilla de abajo a la derecha hay siete rayas, entonces hemos concluido la división. El resultado es

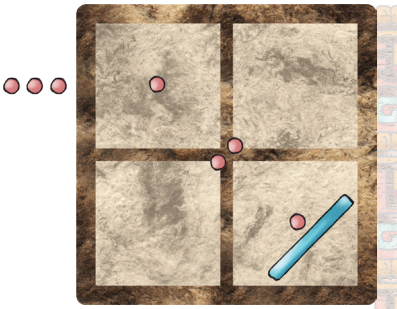


es decir, 945÷27=35.

4. Efectúa la división



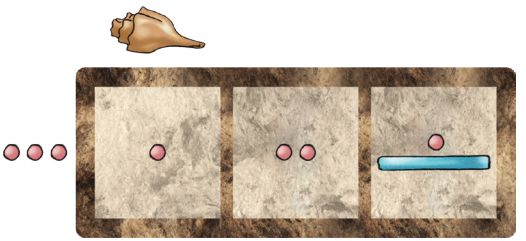
Colocamos los números.



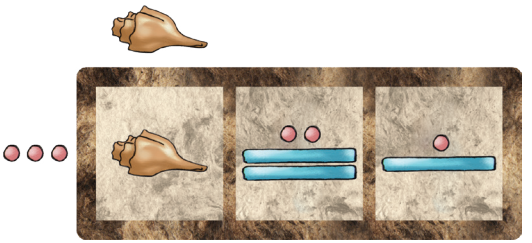
Como el divisor sólo tiene unidades entonces en cada nivel colocamos los números en la casilla de arriba.



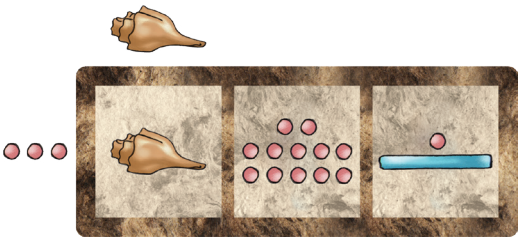
En la primera casilla hay un solo punto entonces arriba debemos colocar 



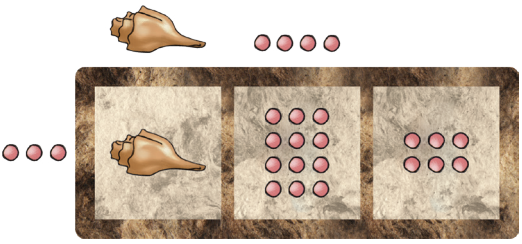
y quitamos el punto de esa casilla y colocamos dos rayas en el nivel inmediato inferior.



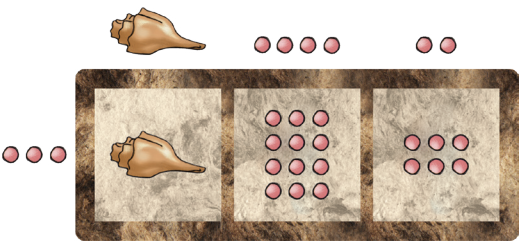
Reemplazamos las dos rayas por 10 puntos.



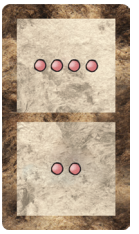
Puesto que en el divisor hay tres puntos, en la segunda casilla formamos tantos grupos de tres como se pueda. Puesto que en este caso es posible formar cuatro ternas, podemos colocar arriba 4 puntos y para continuar cambiamos la raya de la tercera casilla por 5 puntos y los colocamos en grupos de tres.



y arriba de éstos colocamos 2 puntos, ya que en la tercera casilla pudimos formar dos grupos de tres.

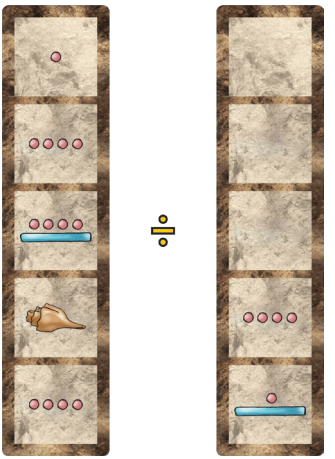


Así, el resultado es

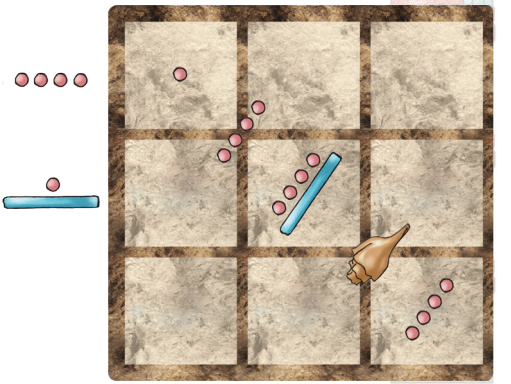


es decir, 126÷3=42.

5. Efectúa la división



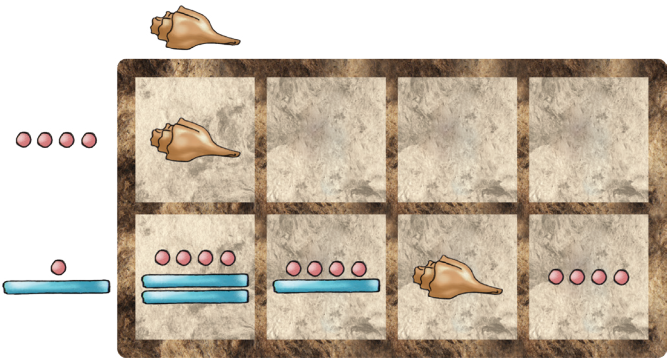
Colocamos los números en el tablero.



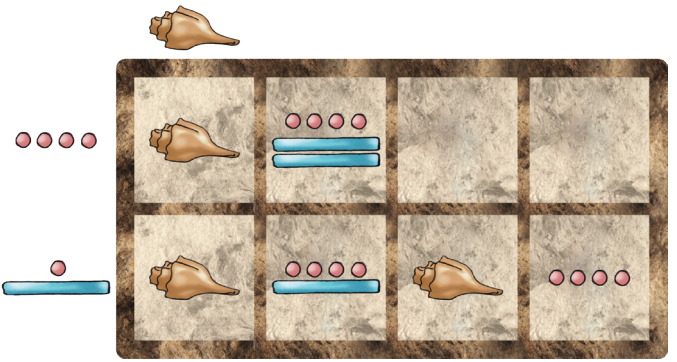


Nos fijamos en el lugar de las unidades del divisor y colocamos las cifras del dividendo que se encuentran por debajo de este nivel, de manera horizontal a esa altura. Notamos que las cifras no han cambiado de nivel, debido a que en el dividendo los niveles están sobre las diagonales.

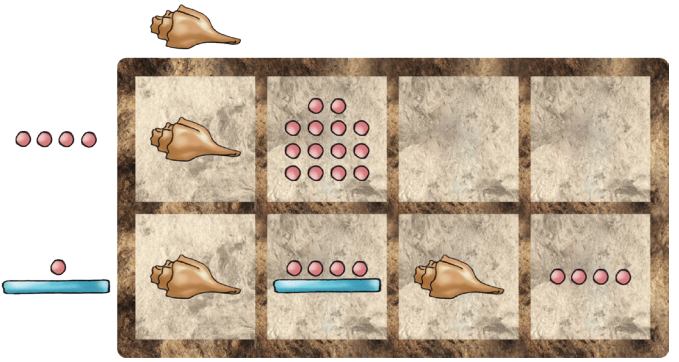
En la primera casilla hay un solo punto, entonces arriba debemos colocar  y cambiamos el punto por dos rayas que colocamos en el nivel inmediato inferior.



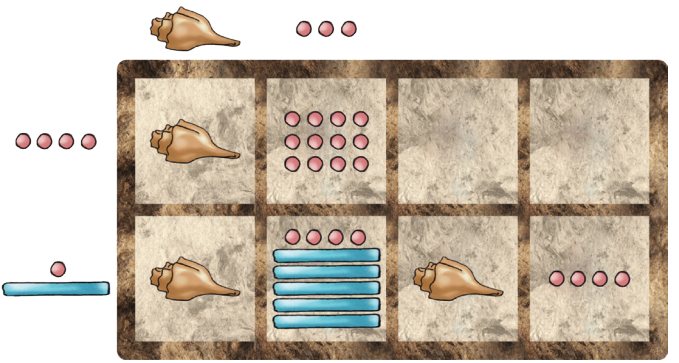
Para completar la casilla inferior izquierda colocamos un  y subimos las dos rayas y los cuatro puntos a la casilla superior correspondiente a ese mismo nivel.



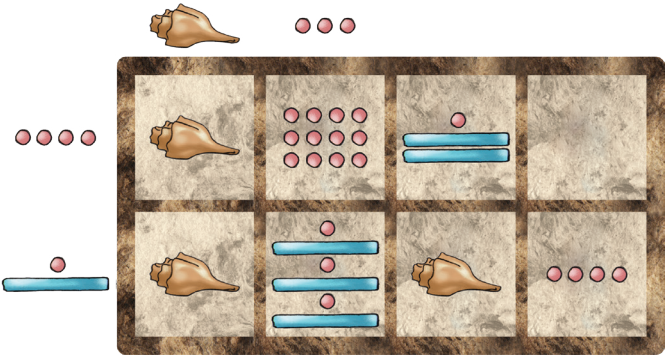
Sustituimos las dos rayas por puntos y los acomodamos en cuartetas:

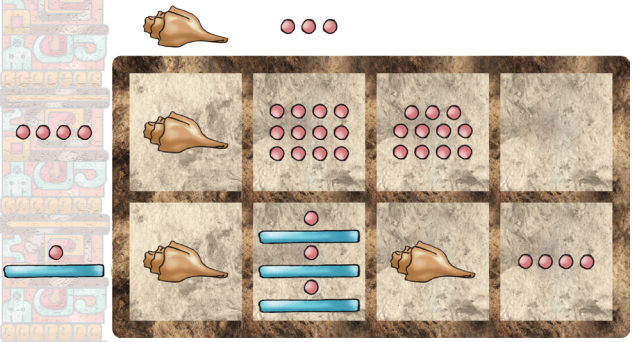


Lo anterior sugiere colocar tres puntos arriba y quitar los dos sobrantes, colocando cuatro rayas en el nivel inmediato inferior:



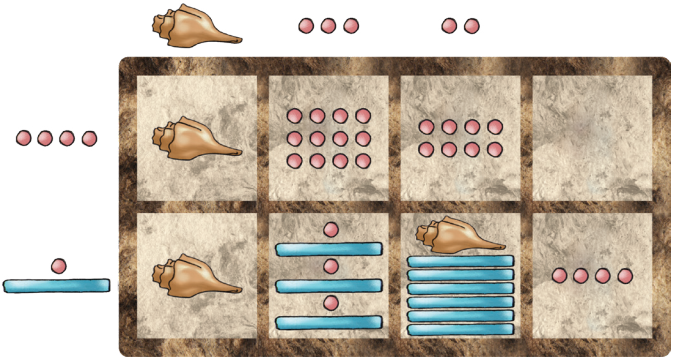
Completamos la segunda casilla de la segunda columna y pasamos lo que sobra a la casilla superior de la tercera columna manteniéndolo en el mismo nivel.



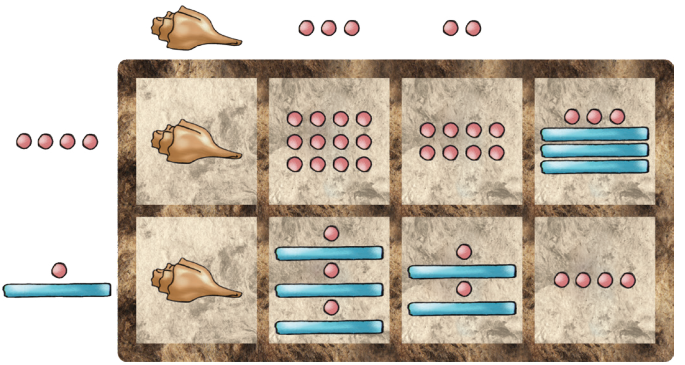


Sustituimos en la tercera casilla, las dos rayas por puntos y los acomodamos en cuartetas:

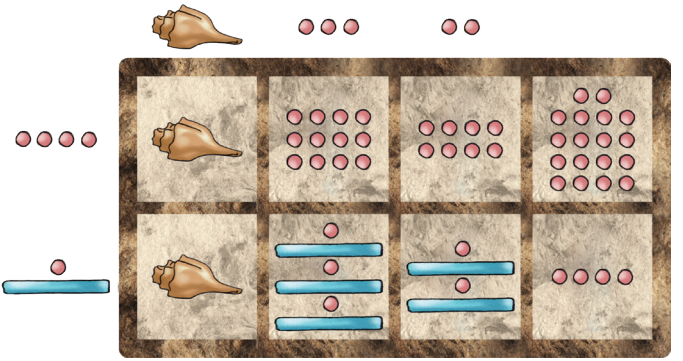
Lo anterior sugiere colocar dos puntos arriba y quitar los tres sobrantes, colocando seis rayas en el nivel de abajo:



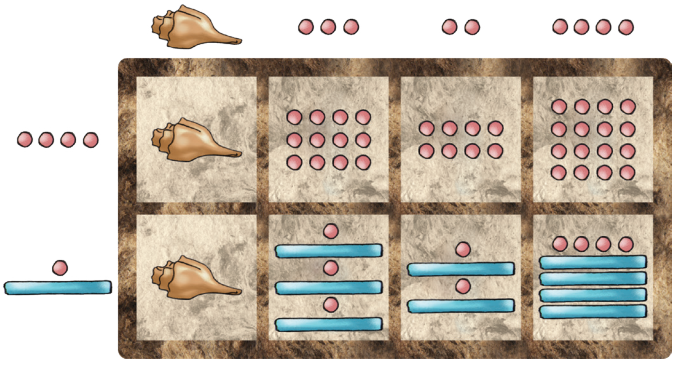
Completamos la segunda casilla de la tercera columna y pasamos lo que sobra a la casilla superior de la cuarta columna, manteniéndolo en el mismo nivel:



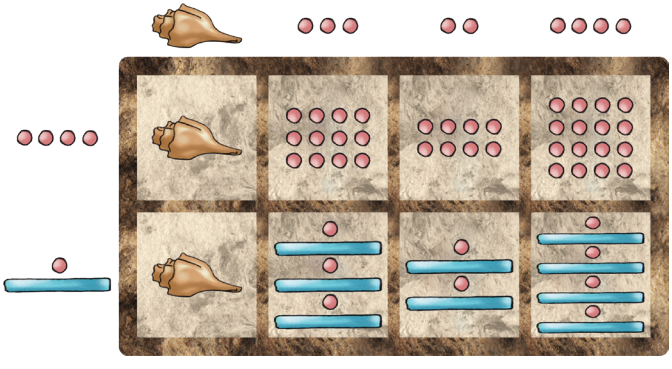
Sustituimos en la cuarta casilla, las tres rayas por puntos y los acomodamos en cuartetas:



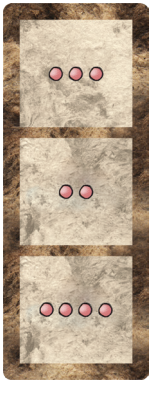
Lo anterior sugiere colocar cuatro puntos arriba y quitar los dos sobrantes colocando cuatro rayas en el nivel que sigue:



Completamos la segunda casilla de la cuarta columna y observamos que la operación está completa. El resultado es



es decir, 14 904÷46=324.

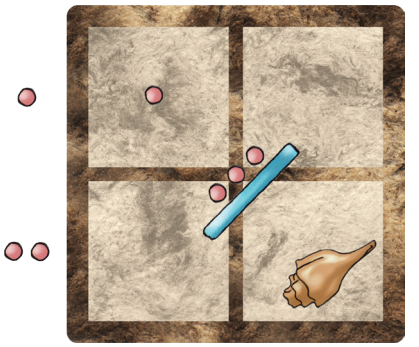


6. Un caracol de tierra puede vivir 180 meses.

¿Cuántos años puede vivir?

Como un año tiene doce meses, entonces calculamos

Como en la primera casilla hay un punto, arriba



debemos colocar un punto y para completar la segunda casilla de la primera columna colocamos dos puntos, trasladando lo que sobra a la primera casilla de la segunda columna.

Lo anterior sugiere colocar un 



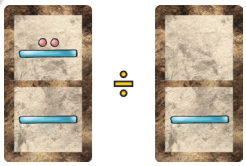
arriba de la segunda columna, pero eso no permitiría completar la segunda casilla, por lo que colocamos una raya y quitamos el punto restante, poniendo dos rayas en el nivel inferior, observando que la operación está completa.

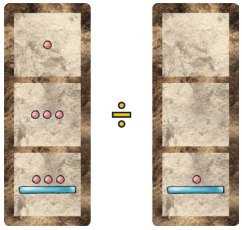
El caracol puede vivir 15 años.

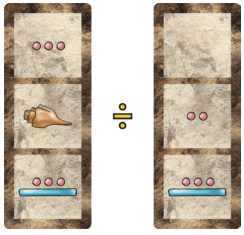


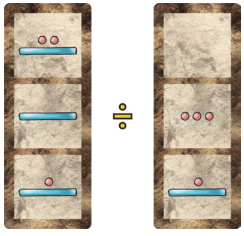
Ejercicios

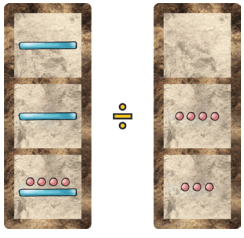
Efectúa las siguientes divisiones.

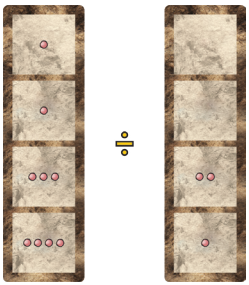
1. 

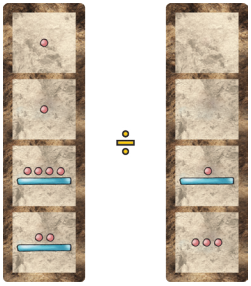
2. 

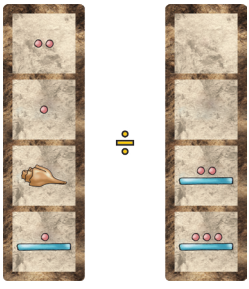
3. 

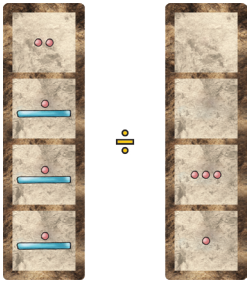
4. 

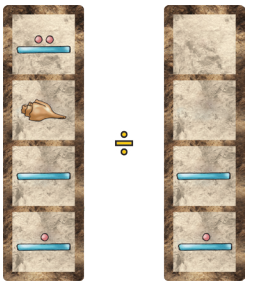
5. 

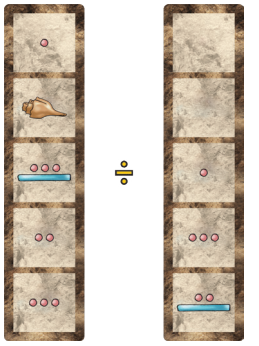
6. 

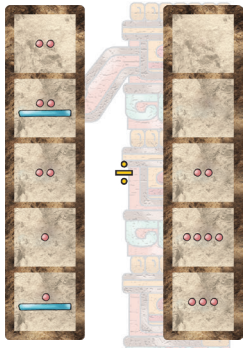
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

Escribe los números en maya y efectúa las siguientes divisiones:

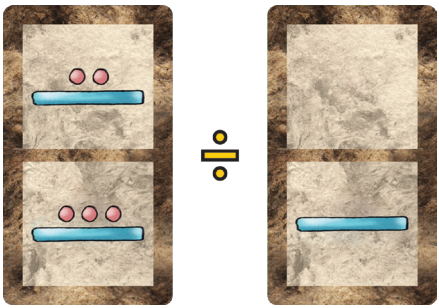
13. 98÷7
14. 648÷9
15. 1344÷56
16. 7038÷3
17. 10 625÷125
18. 6000÷48
19. 1209÷13
20. 47 241÷181

Resuelve los siguientes problemas.

21. Una orca puede recorrer 55 kilómetros en una hora. ¿Cuántos metros recorre por minuto?
22. El macho de una araña viuda negra logró sobrevivir 98 días. ¿Cuántas semanas sobrevivió?
23. La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es 720 grados. Sabiendo que por ser regular todos los ángulos son iguales, encuentra la medida de cualquiera de ellos.
24. He sumado en orden una cantidad fija de números impares: 1+3+5+7+... y la suma me ha dado 121. Divide entre 11 este número y sabras cuántos impares sumé. Comprueba tu resultado.
25. Ana recibe 4 pesos de comisión por cada 100 pesos que logra vender de cierto artículo. Si un día logra vender 5600 pesos en mercancía, ¿cuál será su comisión ese día?

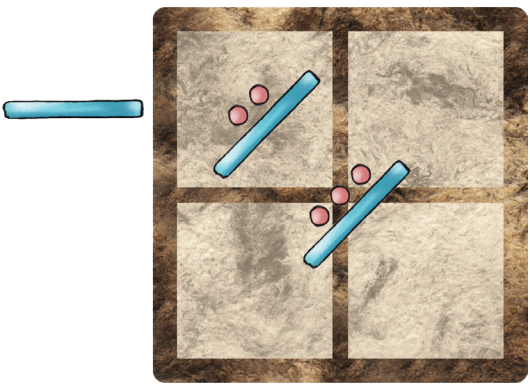
División con residuo

1. Efectúa la división

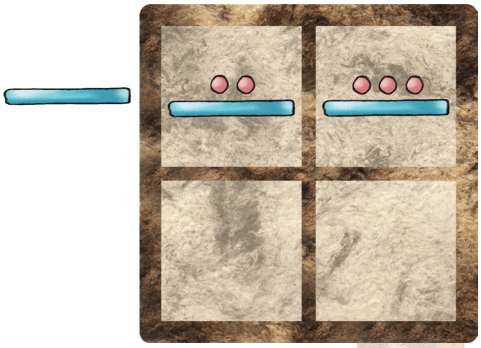


y encuentra el residuo.

Colocamos los números en el tablero:

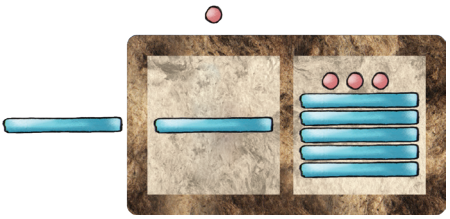


Como el divisor solamente tiene unidades, el ●●● no puede ir en la casilla de abajo, entonces alineamos las cifras del dividendo en un solo renglón.

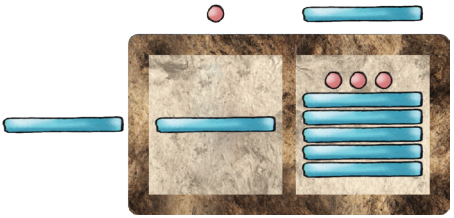


El resultado tendrá a lo más dos cifras enteras. Si la división no es exacta, lo que quede después de completar la cifra correspondiente a las unidades, será el residuo. Hagamos la operación:

Como en la primera casilla del dividendo hay un ●● y en el divisor hay una raya, colocamos un punto arriba, quitamos los dos puntos sobrantes y colocamos cuatro rayas en el nivel inmediato inferior.

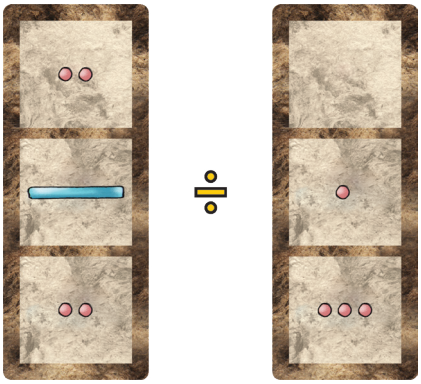


Colocamos una raya arriba de la segunda casilla y sobran tres puntos.

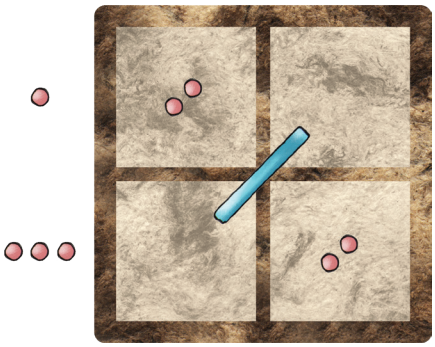


El residuo es ● ● ●
Entonces 78÷5=15 R 3

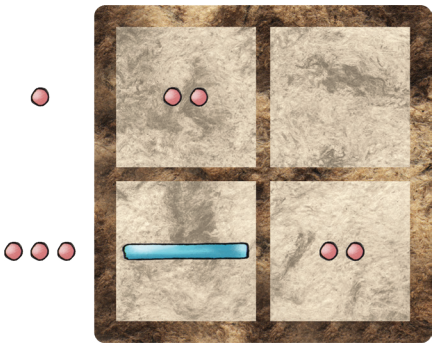
2. Efectúa la división y encuentra el residuo.



Colocamos los números en el tablero.



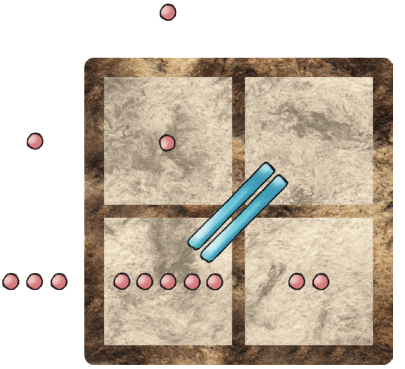
Trasladamos las cifras del dividendo de manera que se forme una L cuya base esté alineada con la cifra de las unidades del divisor.



El resultado de la división tiene a lo más dos cifras enteras.

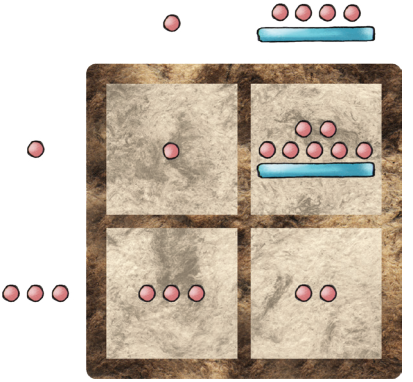
Colocamos arriba un punto, y quitamos el punto restante, colocando dos rayas en el nivel inmediato inferior.

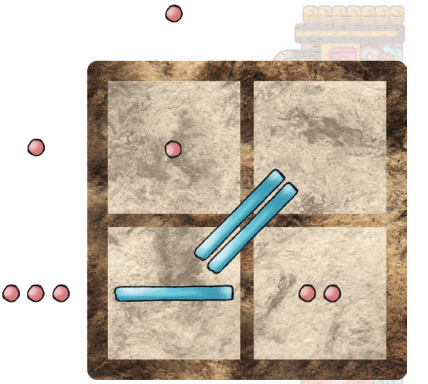
Cambiamos, en el nivel de abajo, una raya por cinco puntos.

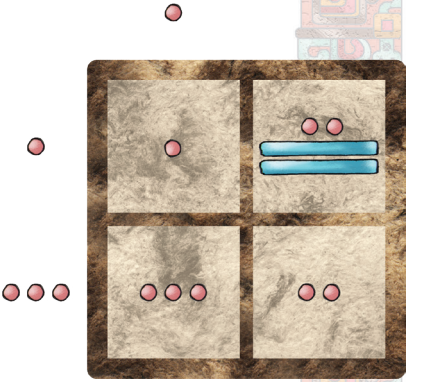


Dejamos en la casilla de abajo los tres puntos que necesitamos y pasamos el resto a la segunda columna.

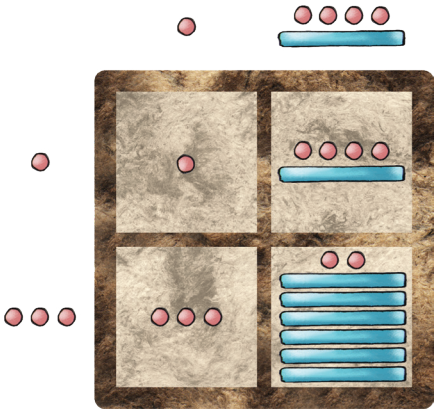
Cambiamos una de las rayas de la segunda columna por cinco puntos y colocamos arriba un  :







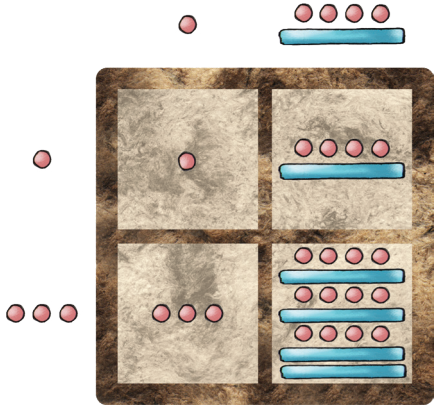
Quitamos los tres puntos que sobran y colocamos seis rayas en el nivel inmediato inferior.



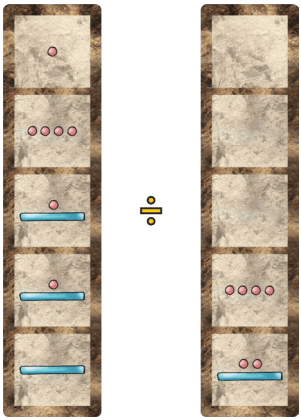
Sustituimos dos de las rayas, cada una por cinco puntos:

La raya restante es el residuo. El residuo es cinco.

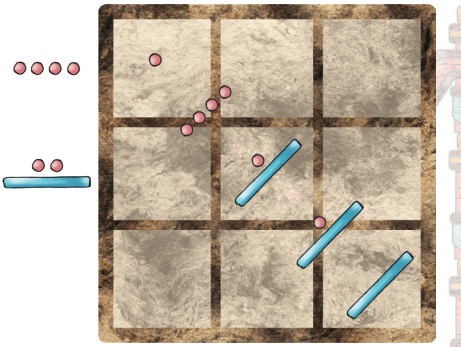
Por lo tanto, 252÷13=19 R 5.



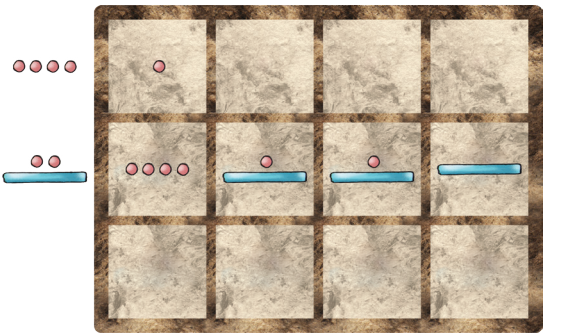
3. Efectúa la división y encuentra el residuo.



Colocamos los números en el tablero:



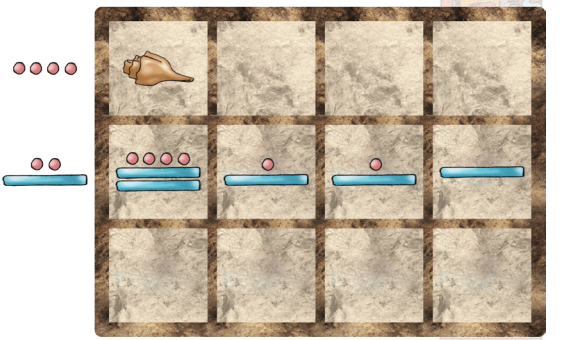
Trasladamos las cifras del dividendo de manera que se forme una L cuya base esté alineada con la cifra de las unidades del divisor:

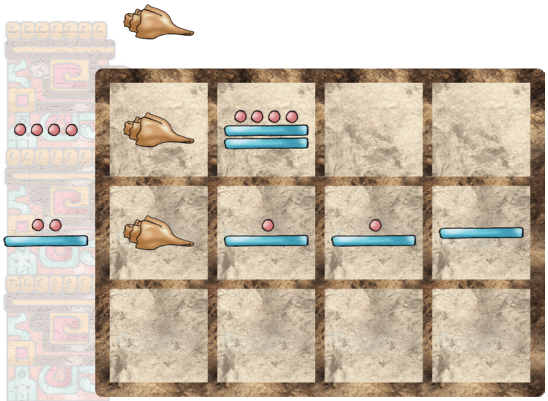


El resultado de la división tiene a lo más cuatro cifras enteras.



Colocamos un  arriba de la primera columna y quitamos el punto colocando dos rayas en el nivel inmediato inferior. En la casilla que dejamos vacía, colocamos un  .

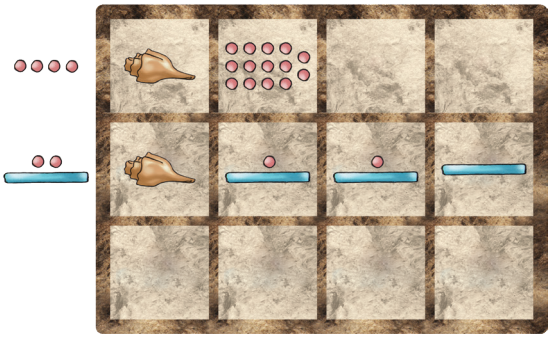




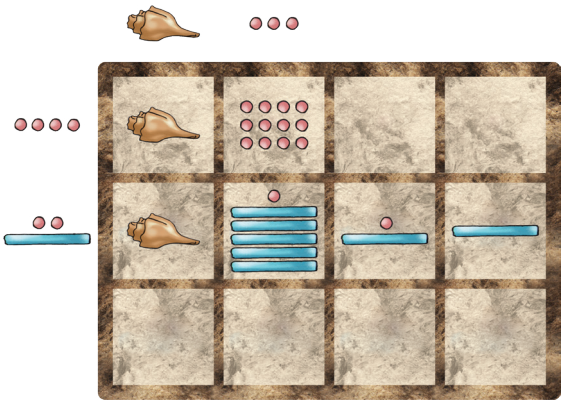
Como arriba de la primera columna hay un caracol, en la segunda casilla de esa columna debe haber un  ; pasamos a la segunda columna las dos rayas y cuatro puntos, sin cambiar de nivel y ponemos un  en el espacio vacío:



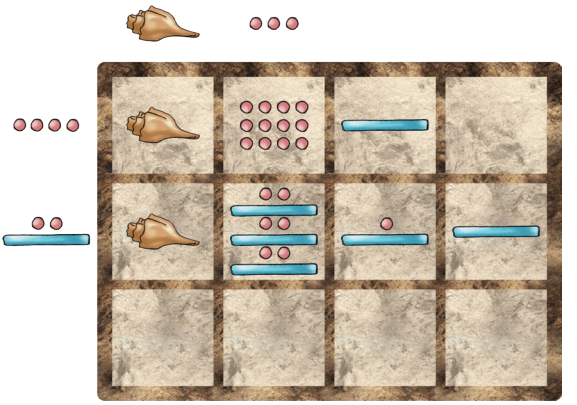
Sustituimos las dos rayas por cinco puntos cada una y formamos grupos de cuatro puntos.



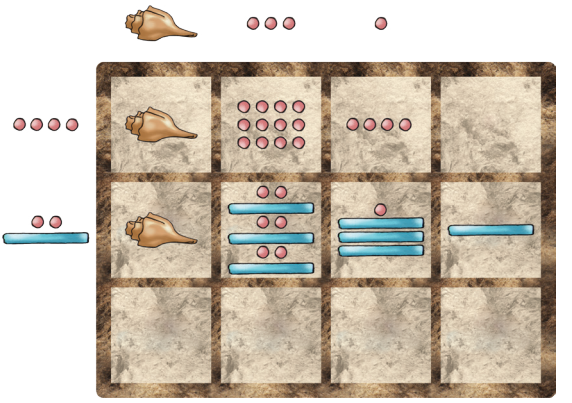
Colocamos tres puntos sobre la segunda columna, quitamos los dos puntos sobrantes y ponemos cuatro rayas en el nivel inmediato inferior.



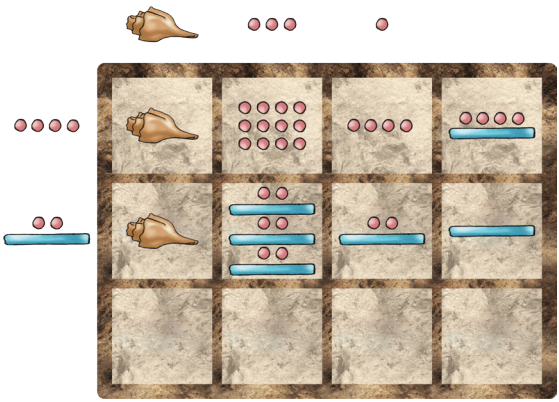
Cambiamos una de las rayas por cinco puntos, formamos tres  y la raya sobrante la pasamos, conservando el nivel, a la tercera columna.

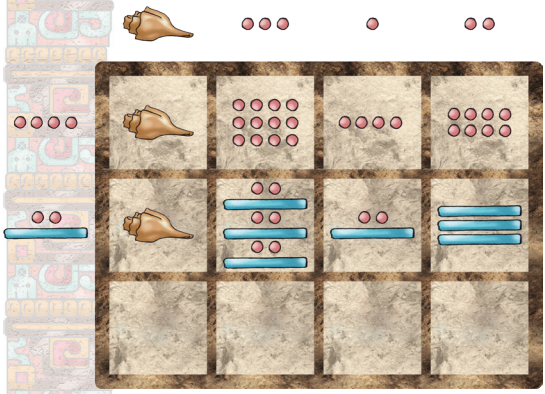


En la tercera columna, sustituimos la raya por cinco puntos, ponemos un punto fuera del tablero y el punto que sobra lo quitamos, colocando dos rayas en el nivel inferior.

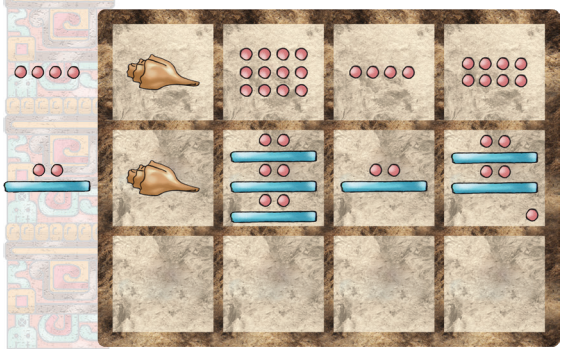


Cambiamos una de las tres rayas por cinco puntos, dejamos un  en esa casilla y pasamos una raya y cuatro puntos, conservando el nivel, a la cuarta columna.





Sustituimos la raya por cinco puntos, formamos dos grupos de cuatro puntos y el punto restante lo quitamos, colocando dos rayas en el nivel inferior. Colocamos dos puntos sobre la cuarta columna:



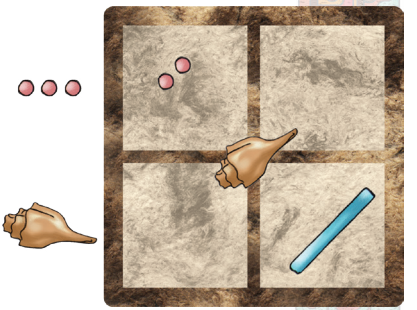
Cambiamos una raya por cinco puntos, formamos dos  y sobra un punto. El residuo es uno.

Por lo tanto,
14 665÷47=312 R. 1.

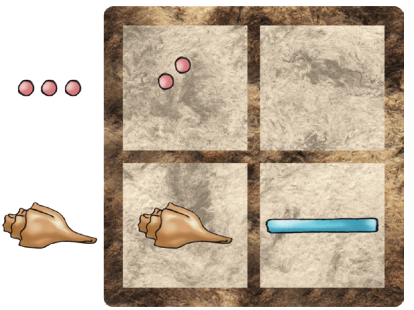


4. El periodo de gestación del puercoespín es de 205 días. ¿Cuántos meses dura la gestación de un puercoespín, si consideramos que los meses tienen 30 días?

Como estamos considerando que los meses tienen 30 días, entonces debemos dividir 205 entre 30.

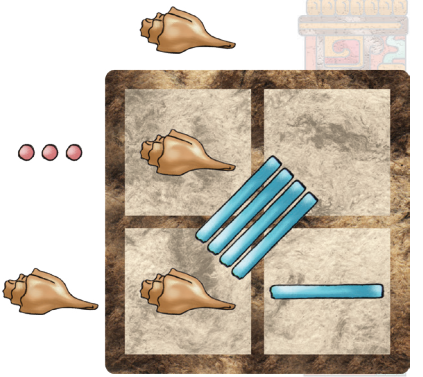


Trasladamos las cifras del dividendo de manera que se forme una L cuya base esté alineada con la cifra de las unidades del divisor.

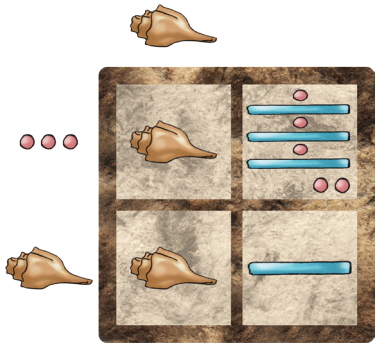


El resultado de la división tiene a lo más dos cifras enteras.

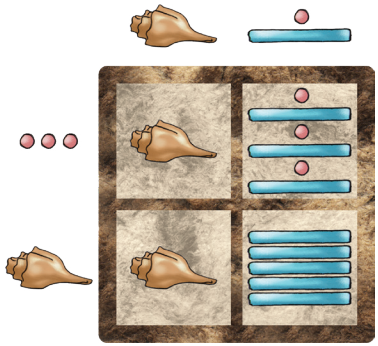
Colocamos un arriba de la primera columna y quitamos los dos puntos colocando cuatro rayas en el nivel inmediato inferior. En la casilla que dejamos vacía, colocamos un .



Como arriba de la primera columna hay un caracol, en la segunda casilla de esa columna debe haber un  ; pasamos a la segunda columna las cuatro rayas y sustituimos una de ellas por cinco puntos para formar tres  .



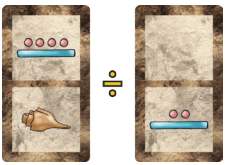
Colocamos un  sobre la segunda columna y los dos puntos que sobran los quitamos y colocamos cuatro rayas en el nivel inferior.

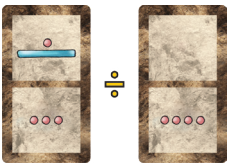


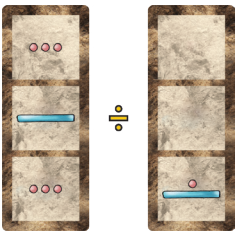
Así, el periodo de gestación de un puercoespín son seis meses y veinticinco días.

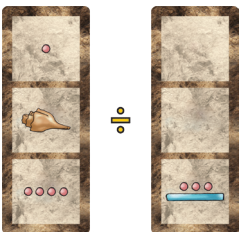
Ejercicios

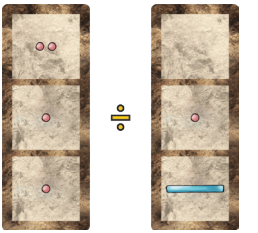
Efectúa las siguientes divisiones y encuentra el residuo.

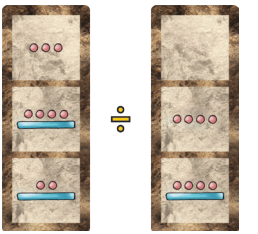
1. 

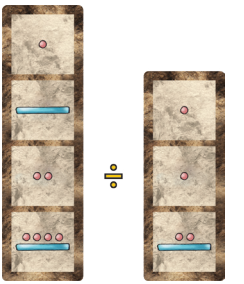
2. 

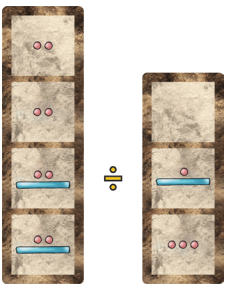
3. 

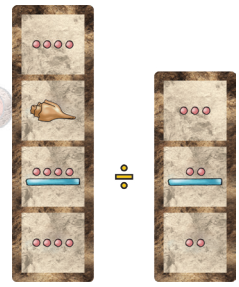
4. 

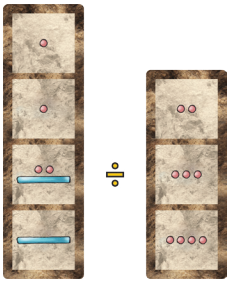
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

Efectúa las siguientes divisiones y calcula el residuo.

11. 339÷55
12. 459÷12
13. 193÷9
14. 737÷92
15. 942÷94
16. 638÷42
17. 1493÷31
18. 2031÷225
19. 2325÷122
20. 2008÷286

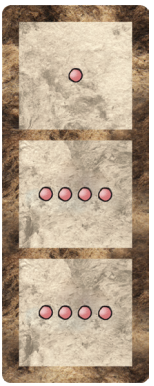
En los problemas siguientes, efectúa la división correspondiente y calcula el residuo.

21. El periodo de gestación de un elefante africano es de 22 meses. ¿Cuántos años dura la gestación de un elefante?
22. Un caballo vive alrededor de 62 años. ¿Cuántos lustros puede vivir?
23. Un halcón peregrino vuela a 362 km por hora, mientras que un camello alcanza una velocidad once veces menor. ¿Cuál es la velocidad a la que corre el camello?
24. En una huerta se recolectaron 3612 naranjas. Si las naranjas se venden por gruesa y cada gruesa consta de 144 naranjas, ¿cuántas gruesas se vendieron? ¿Cuántas sobraron?

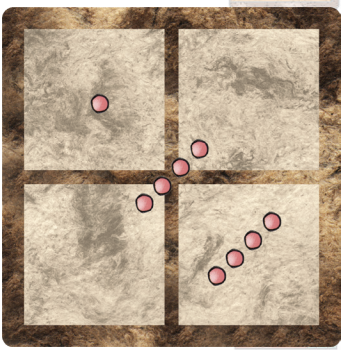
Raíz cuadrada

Podemos decir que la raíz cuadrada es una división en la que desconocemos el divisor y el cociente, pero sabemos que deben ser iguales. Así, el número del que queremos obtener la raíz cuadrada es el resultado de una multiplicación en la que los dos factores son iguales. Esta circunstancia de igualdad entre los factores es la que usaremos para extraer la raíz cuadrada de cualquier número.

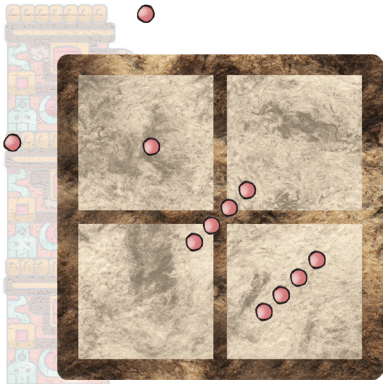
1. Encuentra la raíz cuadrada de



Colocamos el número en el tablero, de manera que las unidades queden en un cuadro.

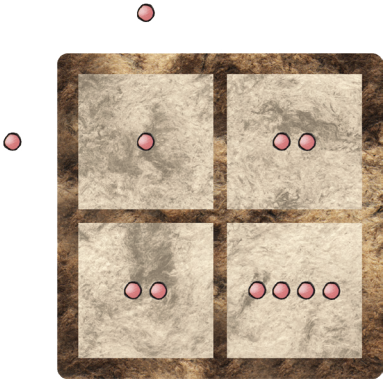




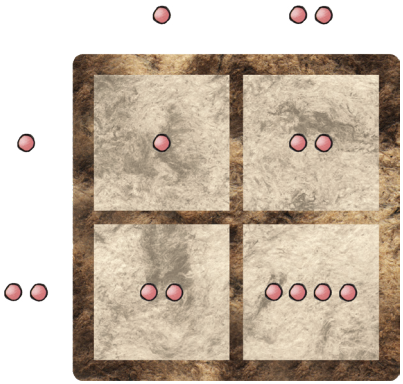


En la casilla correspondiente al tercer nivel aparece un punto, entonces debemos colocar un punto arriba y a la izquierda de la primera casilla.

En el segundo nivel tenemos cuatro puntos que repartimos de manera simétrica en las casillas de ese nivel,



lo cual nos obliga a colocar dos puntos arriba y a la izquierda de ese nivel.

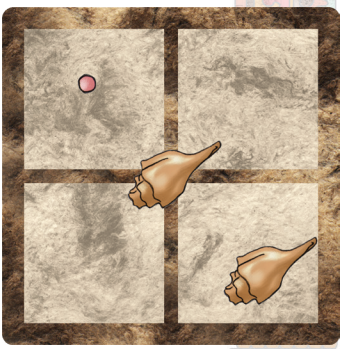


Ahora verificamos que la operación está completa.

Por lo tanto, la raíz cuadrada de  es 

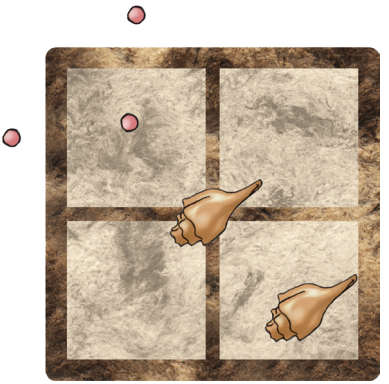
es decir, $\sqrt{144} = 12$.

2. Encuentra la raíz cuadrada de 



Colocamos el número en el tablero, por niveles, de manera que las unidades queden en un cuadro.

Como en la casilla del tercer nivel aparece un punto, entonces debemos colocar un punto arriba y a la izquierda de la primera casilla.





Ahora podemos escribir el  que se encuentra en el segundo nivel como un  en cada casilla de dicho nivel, lo cual nos obliga a colocar un  arriba y a la izquierda de ese nivel. Así se completa la operación, ya que en el primer nivel hay un  .

De donde la raíz cuadrada de



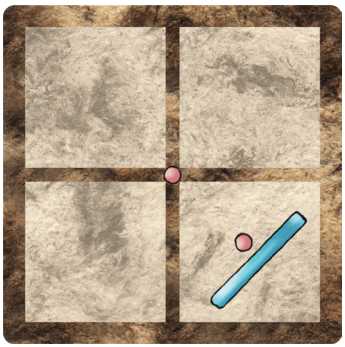
es



es decir, $\sqrt{100}=10$.

3. Encuentra la raíz cuadrada de

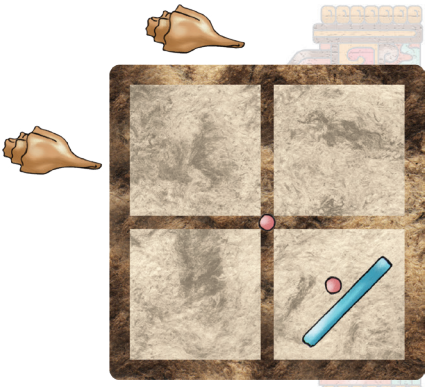




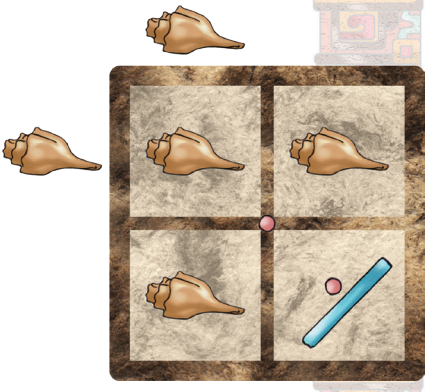
Colocamos el número dentro del tablero por niveles de manera que las unidades queden en un cuadro.

Lo que aparece dentro del tablero es el resultado de una multiplicación en la que los dos factores son iguales.

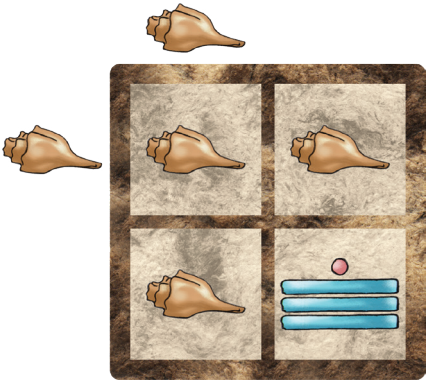
Puesto que la casilla correspondiente al tercer nivel está vacía, entonces colocamos un arriba y a la izquierda de dicha casilla.



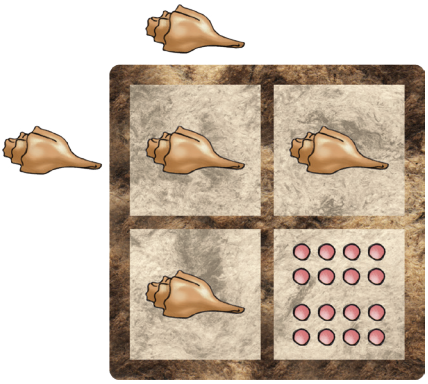
En la casilla correspondiente al tercer nivel colocamos un ya que es el producto de los dos factores correspondientes. Como afuera de la primera columna hay un entonces en toda esa columna aparecen caracoles. Lo mismo pasa con las casillas que se encuentran a la derecha del que está fuera del tablero y a la izquierda.



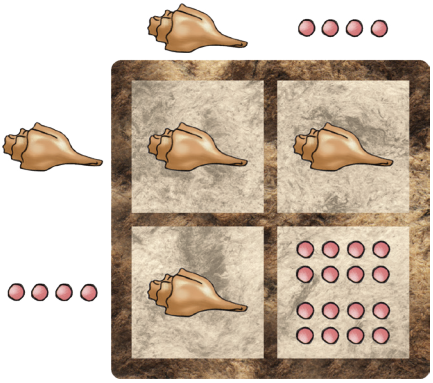
Por lo tanto, quitamos el punto que está en el segundo nivel y colocamos dos rayas en el primero.



Sustituimos las rayas de la segunda casilla de la segunda columna por puntos e intentamos formar con los puntos una figura por duplicado.



Entonces el número que debemos colocar afuera del tablero es ●●●●



Como podemos ver, la operación queda completa de manera exacta.

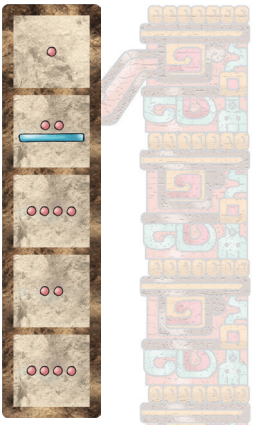
Por lo tanto, la raíz cuadrada de



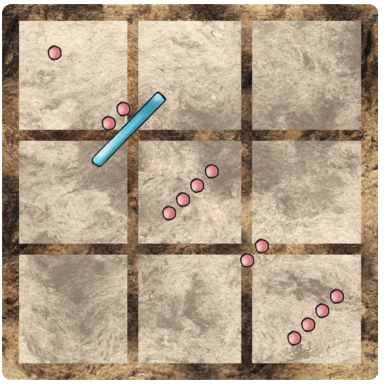
es ●●●●

es decir, $\sqrt{16} = 4$.

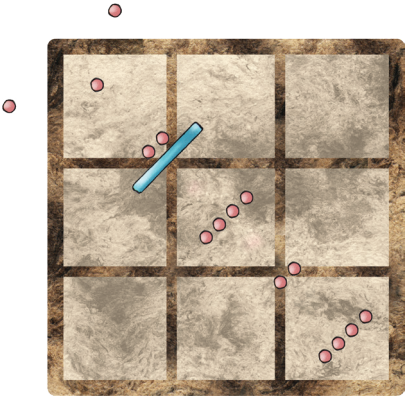
4. Encuentra la raíz cuadrada de



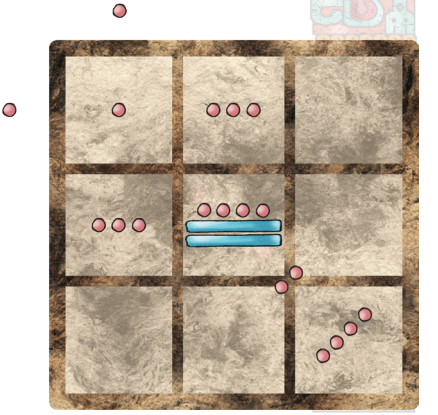
Colocamos los números en el tablero.



En la casilla correspondiente al quinto nivel aparece un punto, entonces debemos colocar un punto arriba y a la izquierda de la primera casilla.



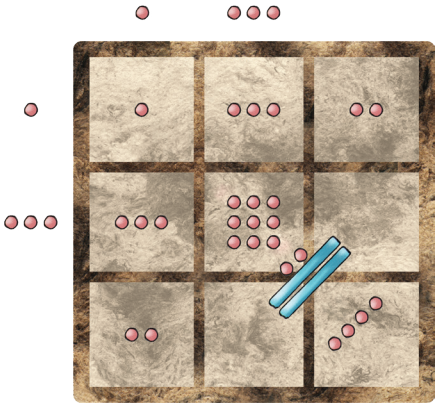
Lo que está en el cuarto nivel, debemos tratar de repartirlo simétricamente, por lo que cambiamos la raya por cinco puntos, ponemos tres puntos en cada casilla y quitamos el punto restante, poniendo dos rayas en el nivel inmediato inferior.



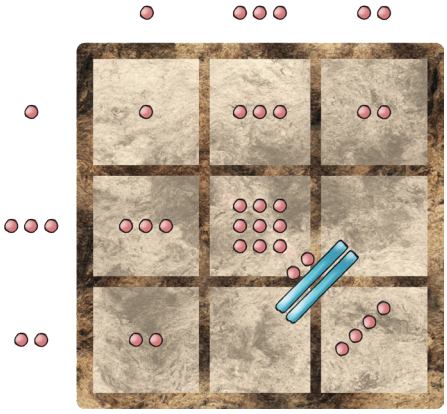


Puesto que tenemos tres puntos en cada una de las casillas del nivel cuatro y un punto arriba y a la izquierda de la primera columna, colocamos un ●●● como segunda cifra del resultado.

Para completar la cuadrícula de 2×2, cambiamos una de las rayas por cinco puntos, formamos los tres grupos de tres puntos y lo que sobra tratamos de repartirlo simétricamente sin cambiar de nivel, entonces quedan dos puntos en cada esquina diagonal y sobra un punto, que quitamos, poniendo dos rayas en el nivel inmediato inferior.

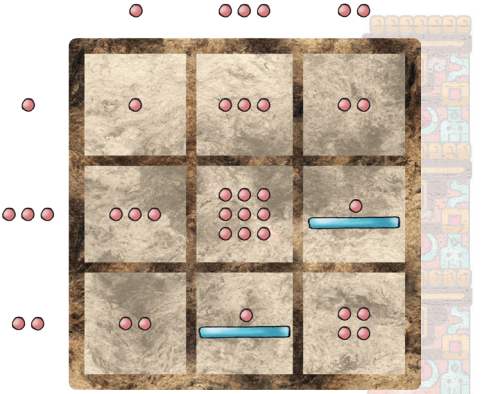


Como tenemos un punto arriba y a la izquierda de la primera columna, colocamos dos puntos como tercera cifra del resultado.





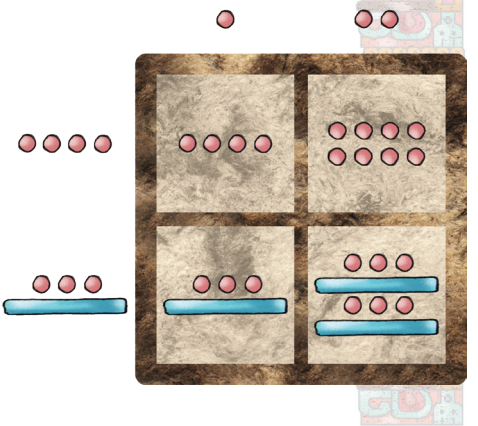
Repartimos simétricamente, sin cambiar de nivel, lo que hay en el segundo nivel y verificamos que la operación está completa.



La raíz cuadrada de  es 

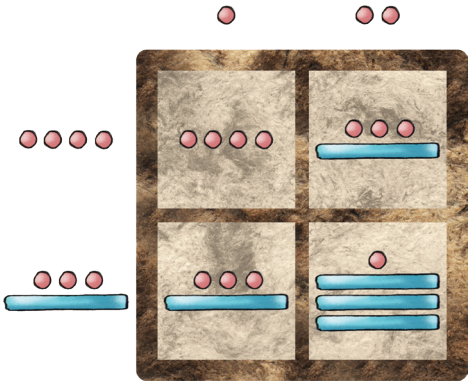
Es decir, $\sqrt{17424} = 132$.

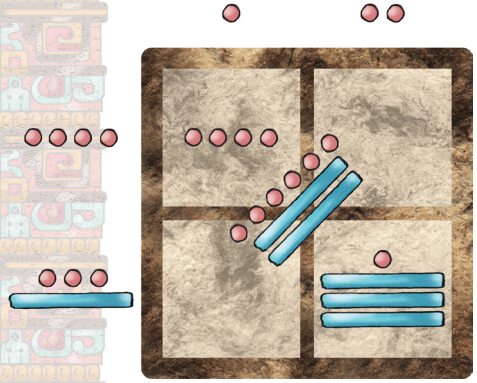
5. La media geométrica de dos números a y b se define como la raíz cuadrada del producto de esos números. Encuentra la media geométrica de los números 48 y 12.



Primero efectuamos el producto de 48 y 12, para lo cual colocamos los números fuera del tablero y efectuamos la operación:

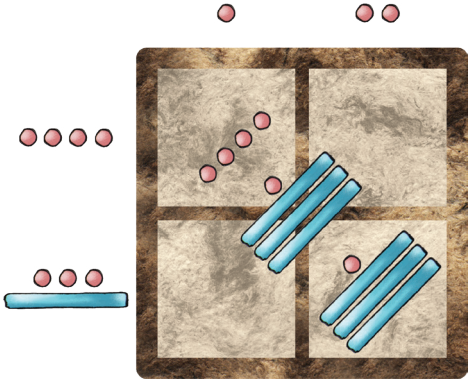
Sustituimos cada cinco puntos por una raya, en las casillas en las que sea posible,



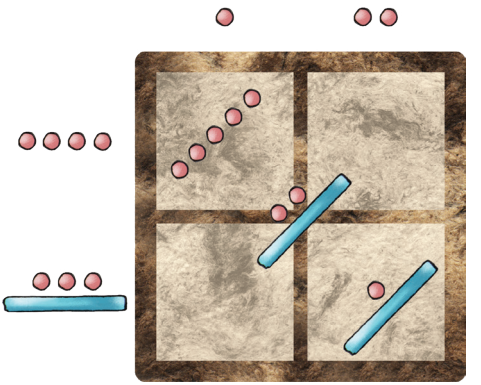


formamos las diagonales.

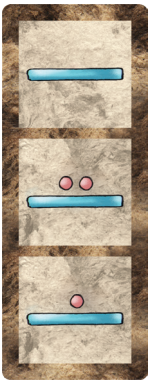
En el nivel dos cambiamos cinco puntos por una raya.



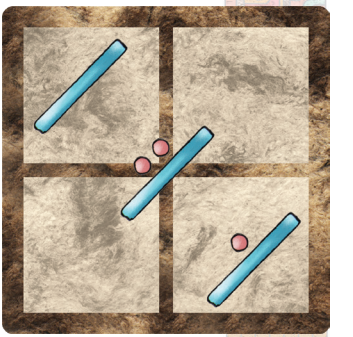
Simplificamos quitando dos rayas en un nivel y colocando un punto en el nivel inmediato superior.



Por último cambiamos los cinco puntos del tercer nivel por una raya y obtenemos que el el producto de 48 y 12 es:

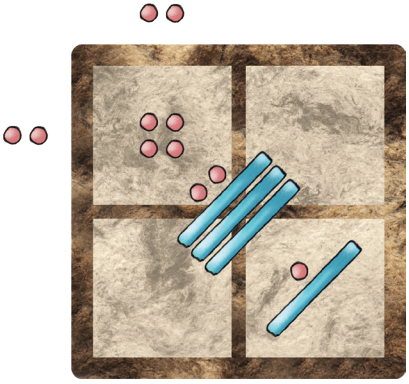


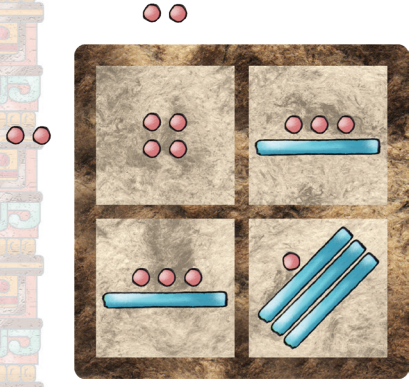
Ahora calcularemos la raíz cuadrada de dicho número. Colocamos el número en la diagonal del tablero.



Cambiamos por cinco puntos la raya del tercer nivel y observamos que debemos colocar dos puntos sobre la primera columna y afuera del primer ren-

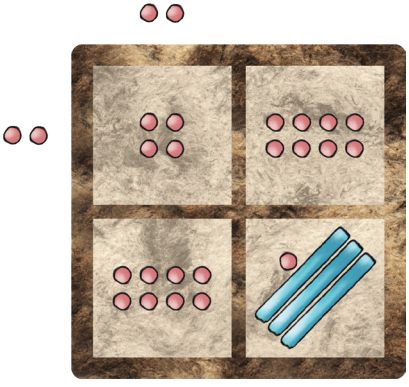
glón. El punto restante lo quitamos, colocando dos rayas en el nivel inmediato inferior.



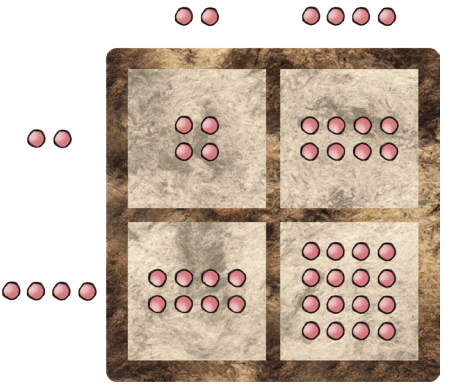


Cambiamos una de las rayas del segundo nivel, por cinco puntos e intentamos repartir simétrica-men-te en las dos casillas; así, quitamos el punto que sobra y colocamos dos rayas en el nivel inmediato inferior:

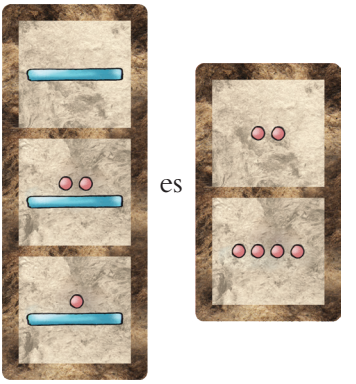
Cambiamos cada una de las rayas de la diagonal por cinco puntos, haciendo además dos grupos iguales en cada casilla.



Colocamos cuatro puntos como segunda cifra del resultado y cambiamos por cinco puntos cada una de las rayas del primer nivel de la diagonal para verificar que la operación está completa.



Así, la raíz cuadrada de



Entonces la media geométrica de 48 y 12 es 24.

Ejercicios

Obtén la raíz cuadrada de los siguientes números:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

Escribe los números en maya y encuentra las siguientes raíces cuadradas:

11. $\sqrt{529}$

12. $\sqrt{1225}$

13. $\sqrt{2209}$

14. $\sqrt{3136}$

15. $\sqrt{15\ 625}$

16. $\sqrt{60\ 516}$

17. $\sqrt{93\ 636}$

18. $\sqrt{85\ 849}$

19. $\sqrt{96\ 100}$

20. $\sqrt{101\ 124}$

Resuelve los siguientes problemas.

21. Un terreno de forma cuadrada tiene un área de 10 609 metros cuadrados. Encuentra la longitud del lado del terreno.

22. Dos perritos de una camada tuvieron el mismo peso al nacer. Si el producto de sus pesos fue de 74 529 gramos, ¿cuántos gramos pesó al nacer cada uno de los perritos?
23. Como no me gusta decir mi edad, cuando alguien me hace la pregunta, le respondo: el número de años que tengo, elevado al cuadrado, es igual a 3025, ¿puedes averiguar mi edad?
24. Los lados de un triángulo miden 3 y 4 centímetros, el tercer lado mide $\sqrt{3\ (3)+4\ (4)}$ ¿Cuánto mide el tercer lado del triángulo?